ASD 2

Algorithmique et Structure de Données

Marc Gaëtano

gaetano@polytech.unice.fr

Polytech'Nice-Sophia

Département Sciences Informatiques

930 route des Colles

06903 Sophia Antipolis - France

Tris rapides et rangs

- Présentation
- Files de priorité (tas)
- Tri pas tas
- Tri rapide (quicksort)
- Tri fusion
- Optimalité

Tris : contexte

- **tri interne** : le tri s'effectue en mémoire centrale. Les tris externes ne sont pas abordés dans ce cours
- **tri de tableau** : un tri qui trie un tableau. Extensible à toute structure de données offrant un accès en temps (quasi)constant à ses éléments (par exemple les `Vector`s en Java)
- **tri générique** : tous les tris présentés ici sont écrits pour trier des tableaux d'objets à clef mais peuvent aisément s'adapter pour des objets totalement ordonnés quelconque

Tris : propriétés

- **tri comparatif** : fondé sur la comparaison entre les clefs des éléments
- **tri itératif** : basé sur un ou plusieurs parcours itératif du tableau
- **tri récursif** : basé sur une méthode récursive
- **tri en place** : ne nécessite qu'une quantité constante de mémoire supplémentaire
- **tri stable** : conserve l'ordre relatif des éléments de même clef

Tris : méthodes quadratiques

Propriétés

- basées sur le parcours itératif du tableau à trier
- en général deux boucles imbriquées
- complexité en $\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} = \Theta(n^2)$ dans le pire des cas, mais aussi en moyenne
- implémentation triviale
- optimal pour les tableaux de petite taille (< 25)

Tris : méthodes quasi-linéaires

Les tris comparatifs optimaux

- **tri par tas** : complexité en $\Theta(n \lg n)$ (pire des cas et en moyenne)
- **tri rapide (ou *quicksort*)** : complexité en $\Theta(n \lg n)$ (en moyenne) mais peut dégénérer ($\Theta(n^2)$ dans le pire des cas)
- **tri fusion** : complexité en $\Theta(n \lg n)$ (pire des cas et en moyenne) mais nécessite un tableau auxiliaire (le tri n'est plus en place)

Tri par Tas : introduction

- *heapsort* en anglais
- inventé par Williams en 1964
- basé sur une structure de donnée très utile, la *file de priorité*
- complexité bornée par $\Theta(n \lg n)$ quelquesoit la configuration du tableau
- tri en place
- mise en œuvre très simple

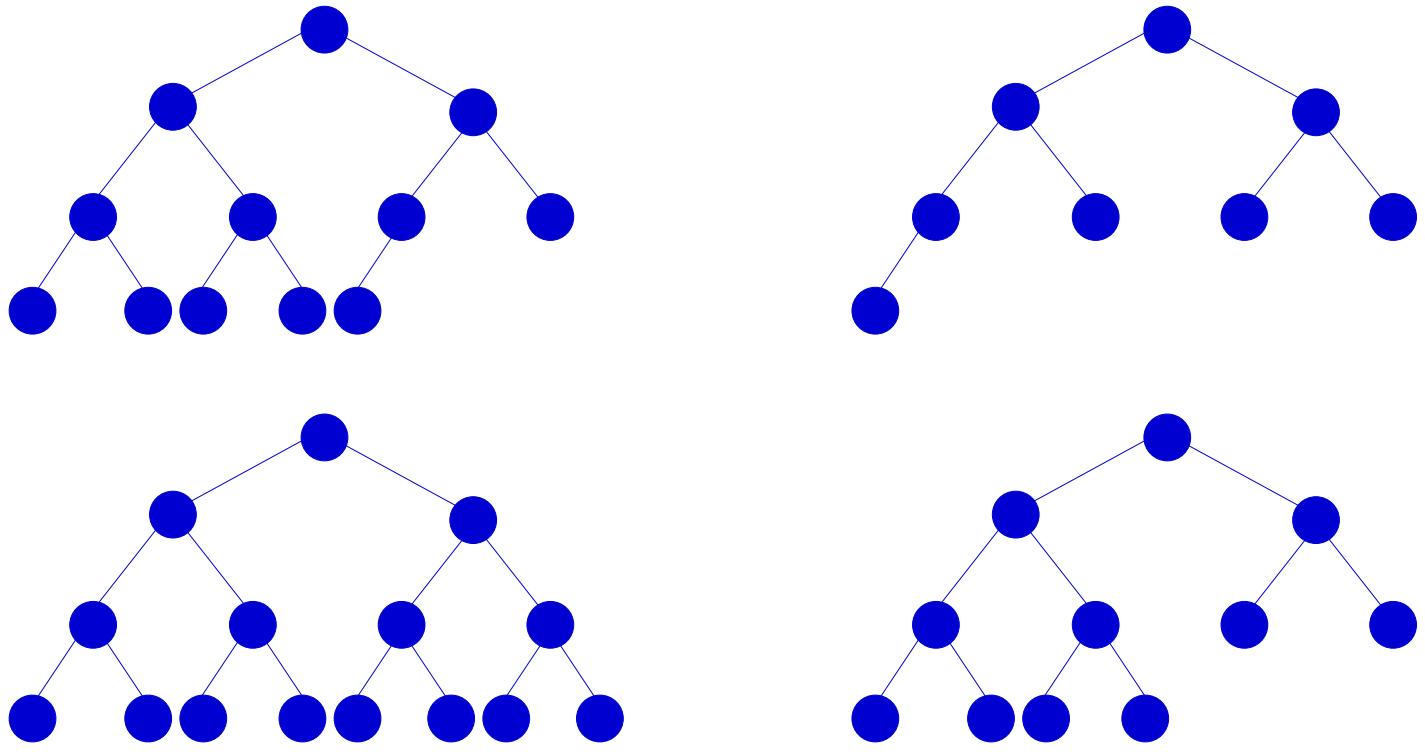
Tas : arbre parfait

$\mathcal{A}$ est un arbre parfait si

- $\mathcal{A}$ est arbre binaire de hauteur h
- une feuille de $\mathcal{A}$ a la profondeur h ou $h-1$
- $\mathcal{A}$ possède 2^{h-1} nœuds de profondeur $h-1$
- tous les nœuds de profondeur h sont regroupés le plus à gauche possible

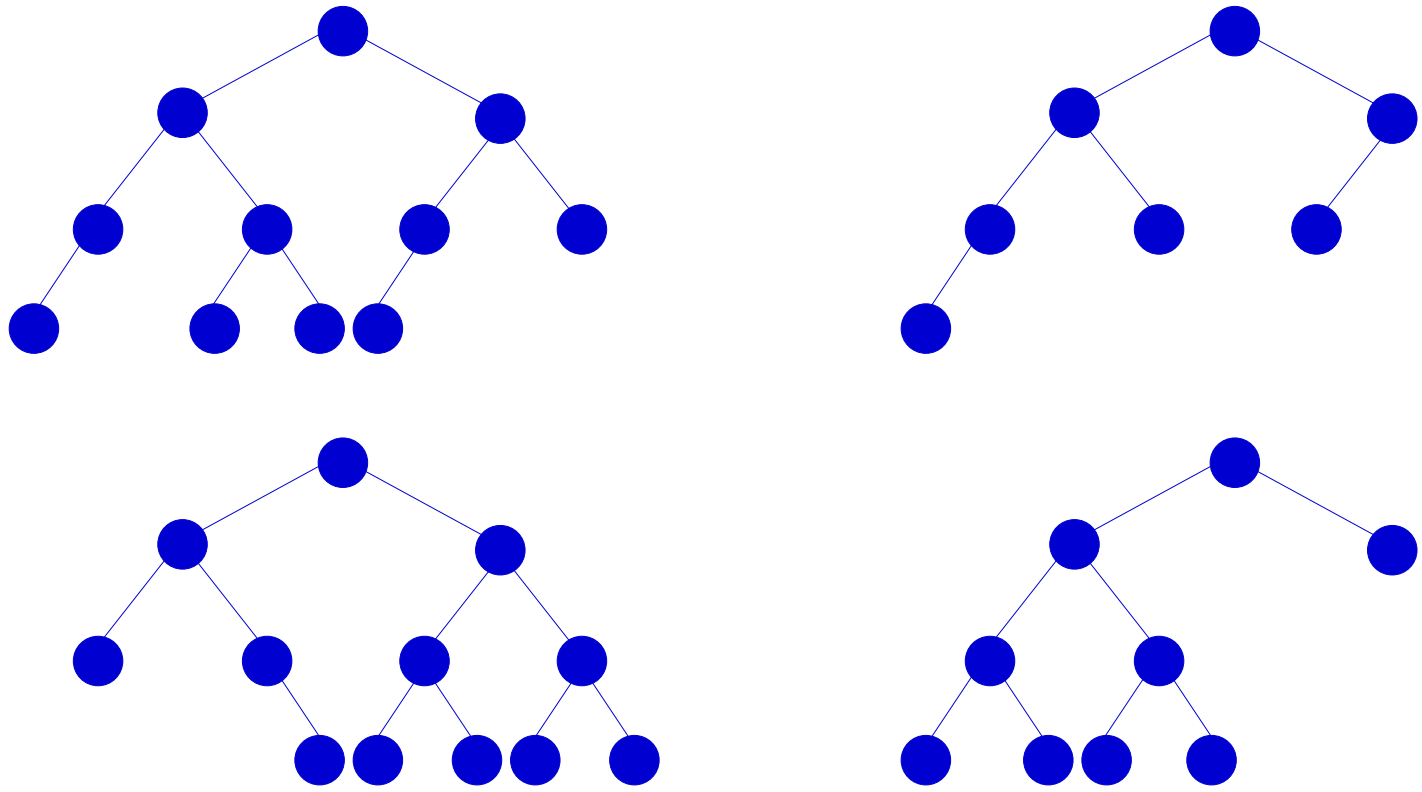
Tas : arbre parfait

Des arbres parfaits



Tas : arbre parfait

Des arbres non parfaits



Tas : arbre parfait

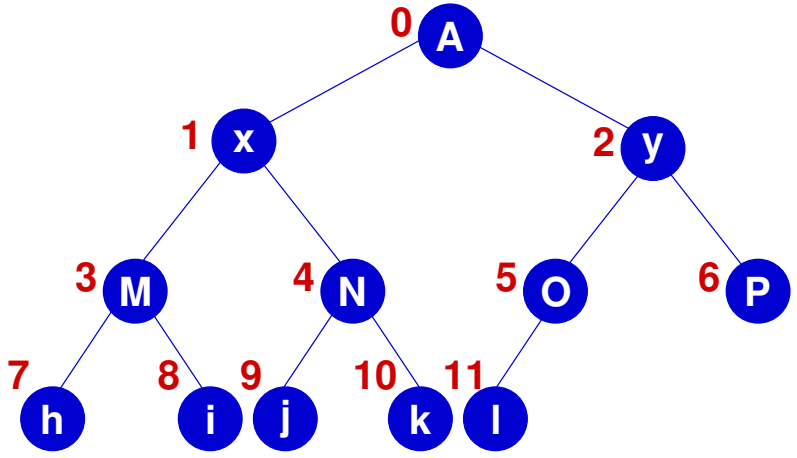
$\mathcal{A}$ un arbre parfait de taille n et de hauteur h

- n est supérieur ou égal à la taille de l'arbre complet de hauteur $h-1$ plus un, soit $2^{h-1+1}-1+1=2^h$
- n est inférieur ou égal à la taille de l'arbre complet de hauteur h, soit $2^{h+1}-1$

$$2^h \leq n \leq 2^{h+1}-1 \Longrightarrow 2^h \leq n < 2^{h+1} \Longrightarrow$$
$$h \leq \lg n < h+1 \Longrightarrow h = \lfloor \lg n \rfloor$$

Tas : arbre parfait

Représentation compacte à l'aide d'un tableau

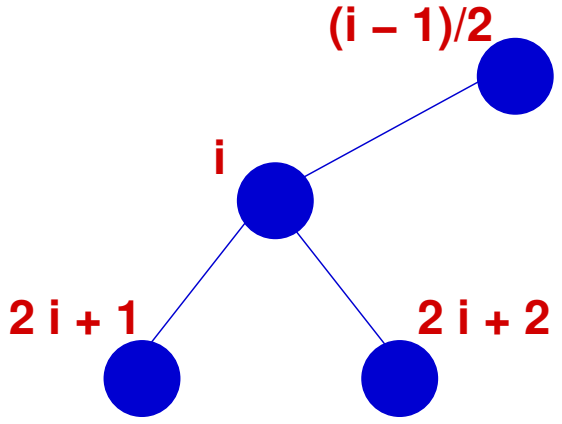


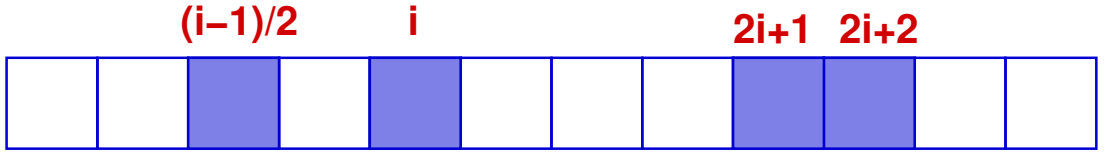
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	x	y	M	N	O	P	h	i	j	k	l				

Tas : arbre parfait

Codage des nœuds

- $\text{pere}(i) = (i-1)/2$
- $\text{gauche}(i) = 2i+1$
- $\text{droite}(i) = 2i+2$





Tas : arbre parfait

Représentation

- un tableau T d'objets à clef et un entier N égal à la longueur du préfixe du tableau T occupé par le tas
- $N = 0 \iff$ l'arbre parfait est vide et
  $N = T$.length $\iff$ l'arbre parfait est plein

Opérations triviales sur un arbre parfait

- accès à la racine ($T[0]$), à la dernière feuille ($T[N-1]$), aux sous-arbres gauche et droit et au père
- ajout (resp. suppression) de la dernière feuille avec $N \leftarrow N + 1$ (resp. $N \leftarrow N - 1$)

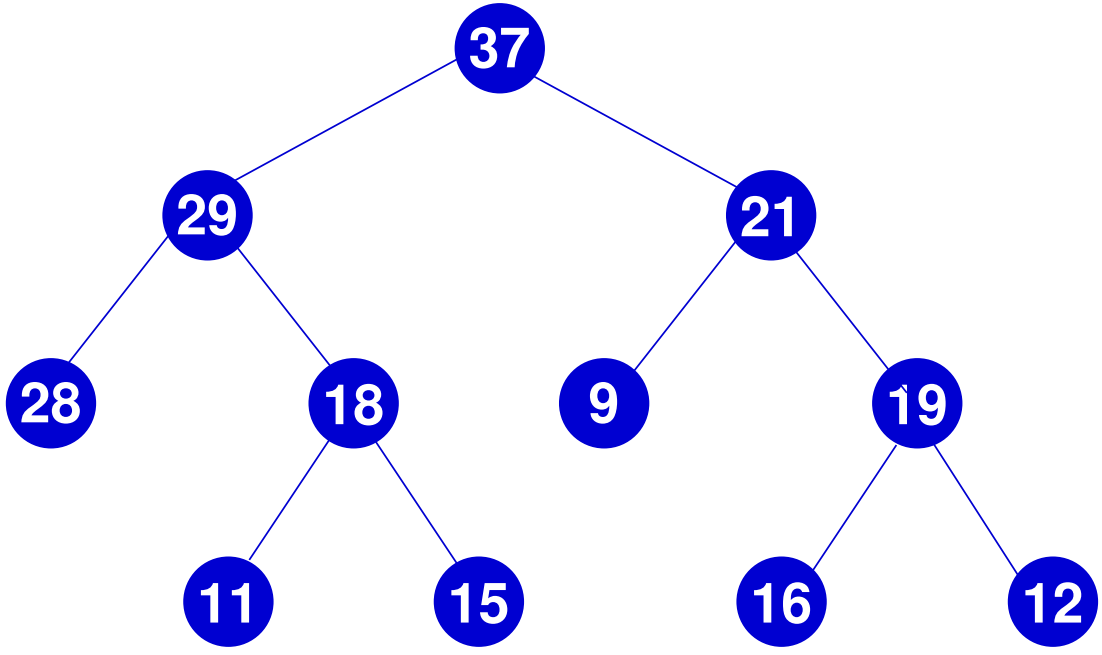
Tas : arbre ordonné

$\mathcal{A}$ est un arbre partiellement ordonné si

- $\mathcal{A}$ est un arbre binaire
- $\mathcal{A}$ contient des objets à clef
- $\forall \mathcal{A}'$ sous-arbre de $\mathcal{A}$, $\mathrm{clef}(r(\mathcal{A}'')) \leq \mathrm{clef}(r(\mathcal{A}'))$, $\forall\, \mathcal{A}''$ sous-arbre de $\mathcal{A}'$, où $r(A)$ est la racine de l'arbre A et $\mathrm{clef}(x)$ la clef de l'objet à clef x

Tas : arbre ordonné

Exemple



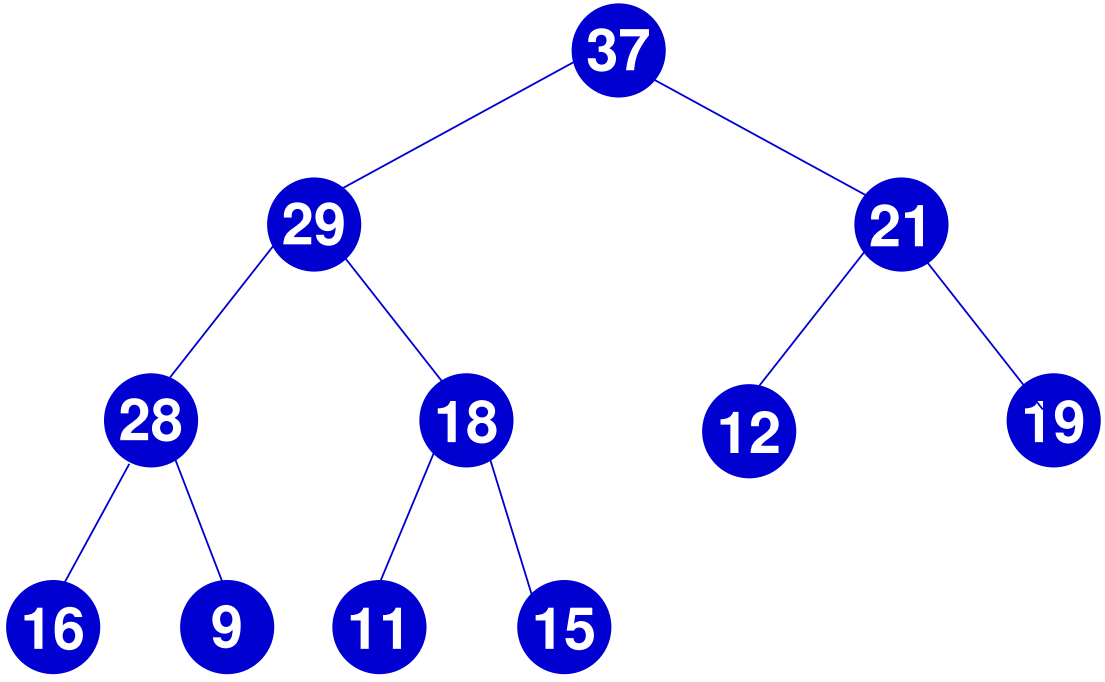
Tas : file de priorité

Structure de données fondamentale

- un arbre parfait partiellement ordonné de taille n
- supporte les opérations :
  - *extrême* : retourne l'élément de clef maximum (ou minimum) du tas en $\Theta(1)$
  - *extraire* : retire et retourne l'élément de clef extrême du tas en $O(\lg n)$
  - *ajouter* : ajoute un nouvel élément au tas en $O(\lg n)$

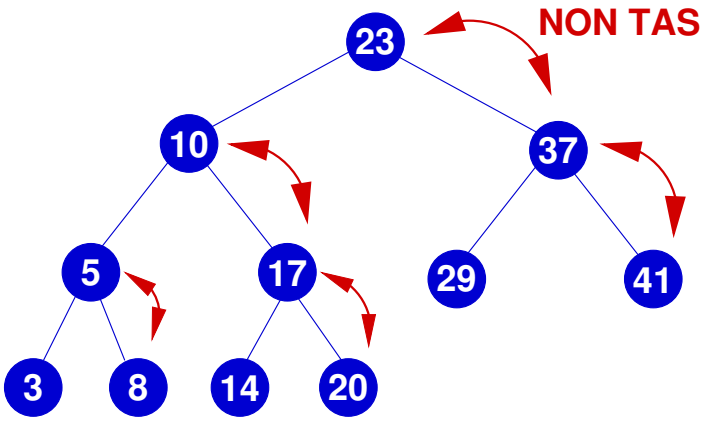
Tas : file de priorité

Exemple

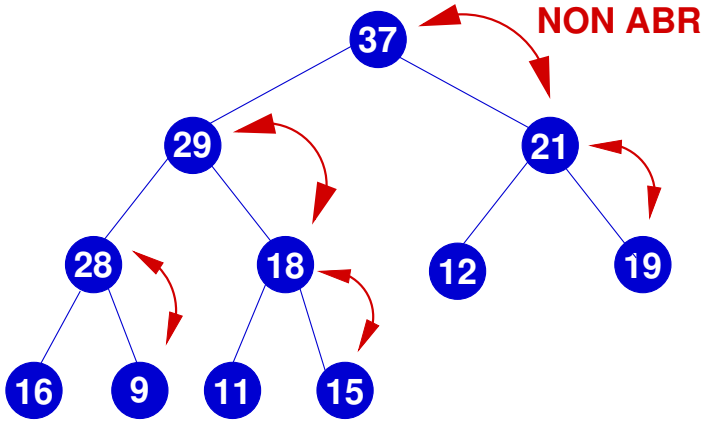


Tas : file de priorité

Différent d'un ABR



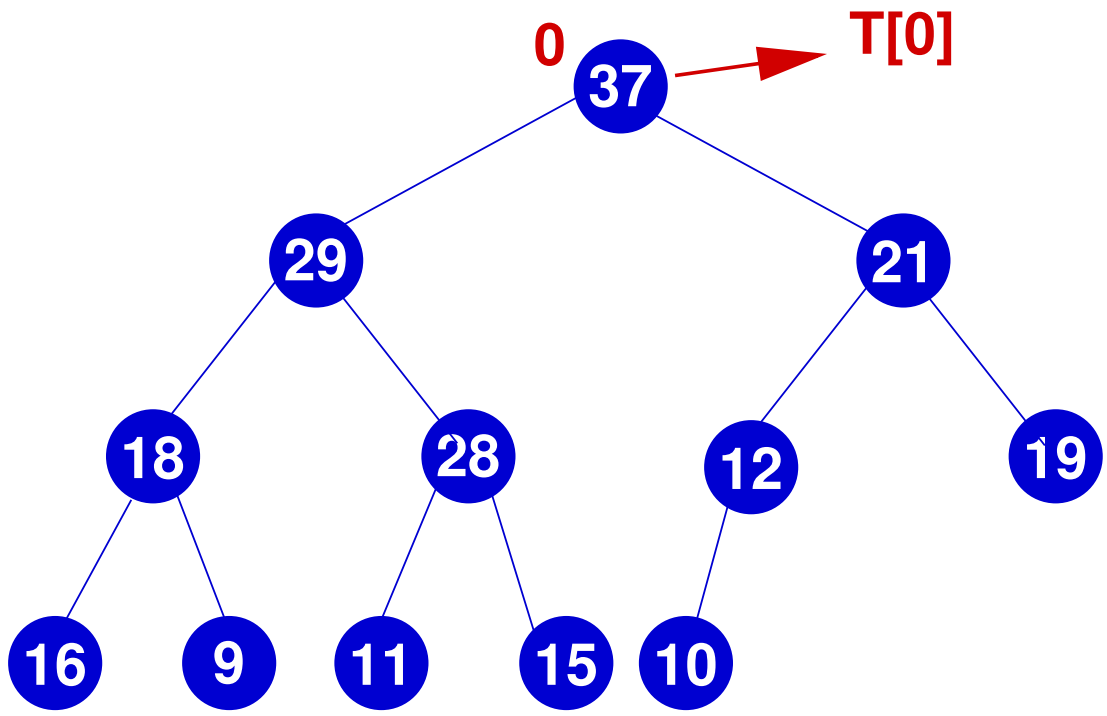
ABR



TAS

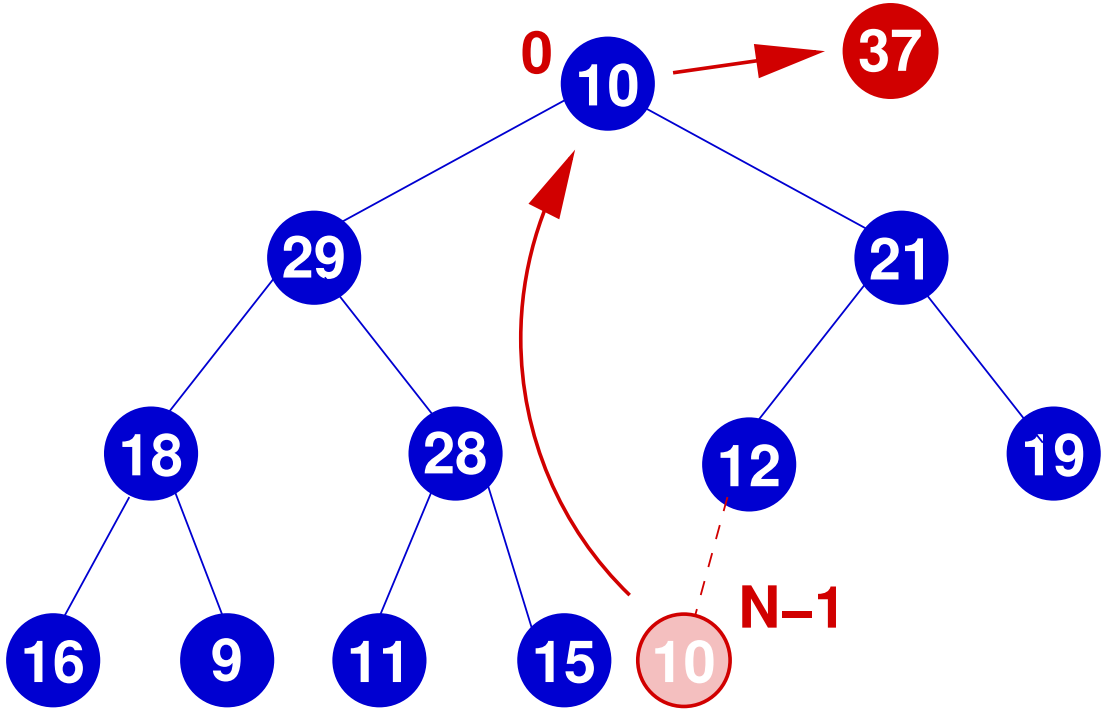
Tas : accès au maximum

Accès au maximum en $\Theta(1)$



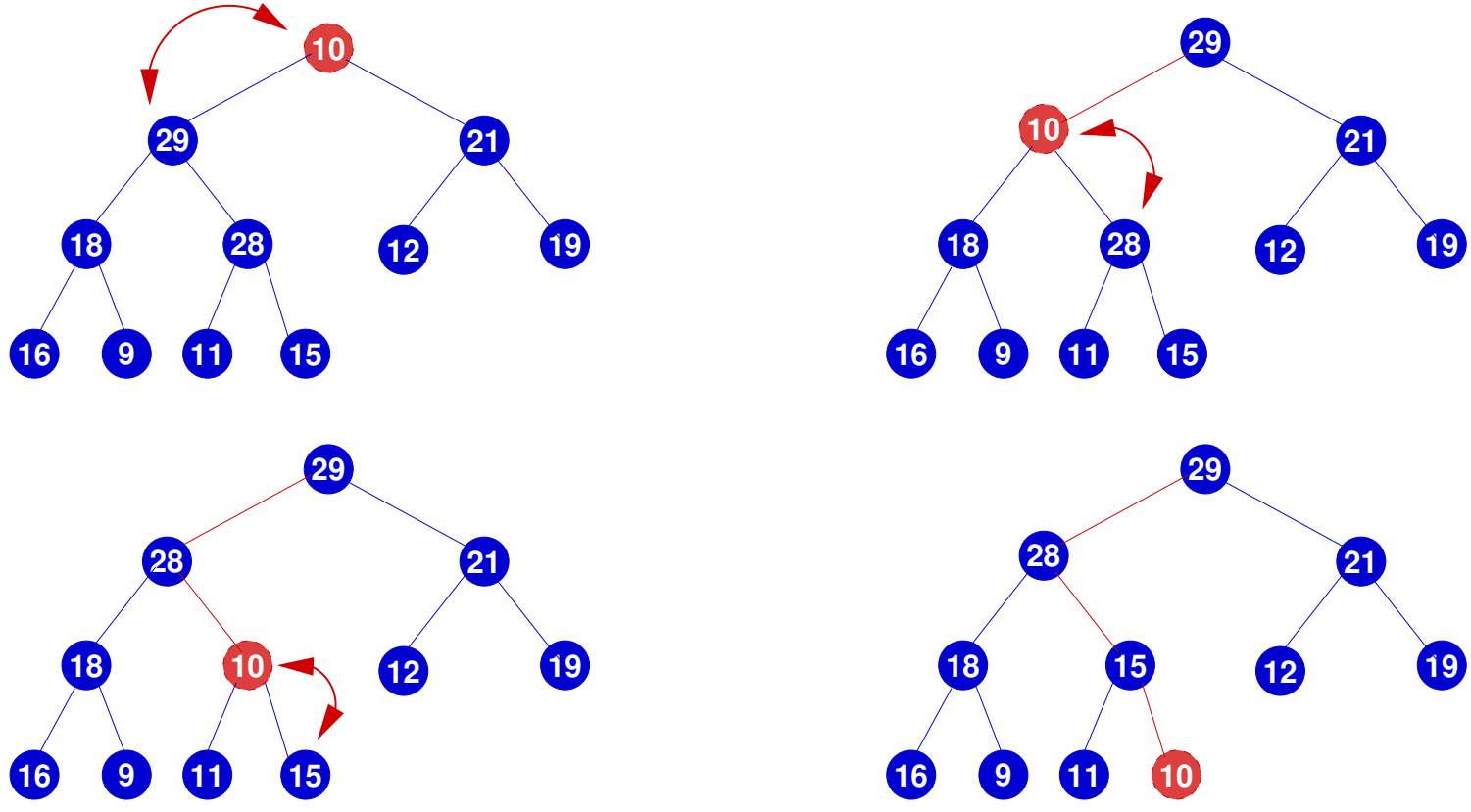
Tas : extraire le maximum

Accès et remplacement du maximum en $\Theta(1)$



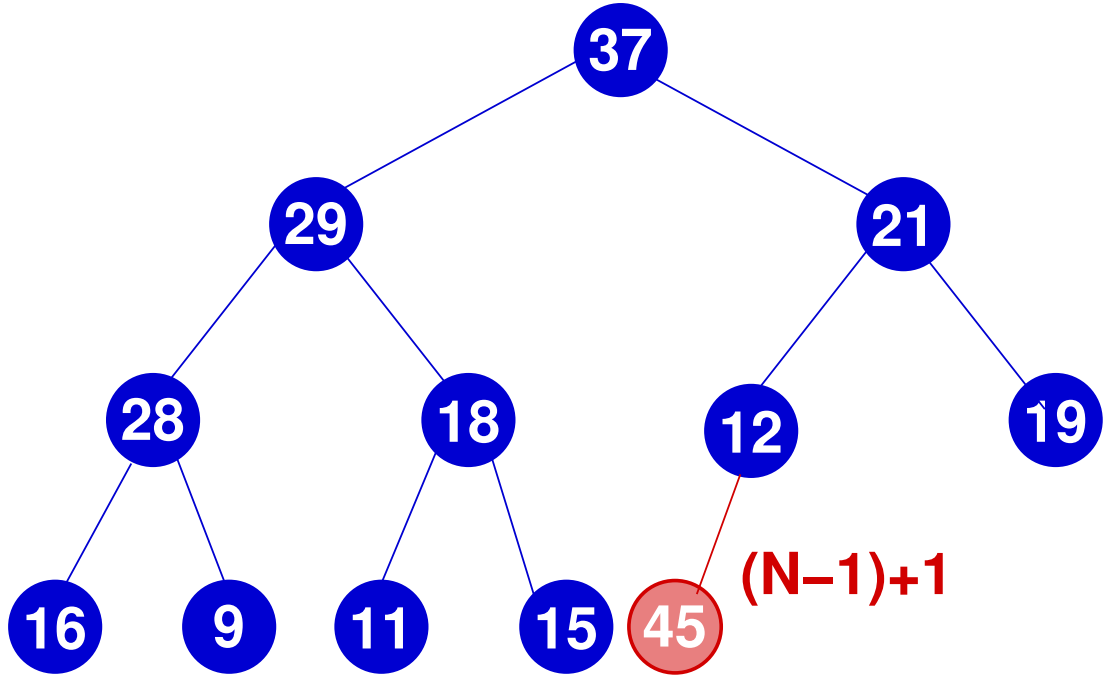
Tas : tasser

Reconstitution de l'ordre partiel en $O(\lg n)$



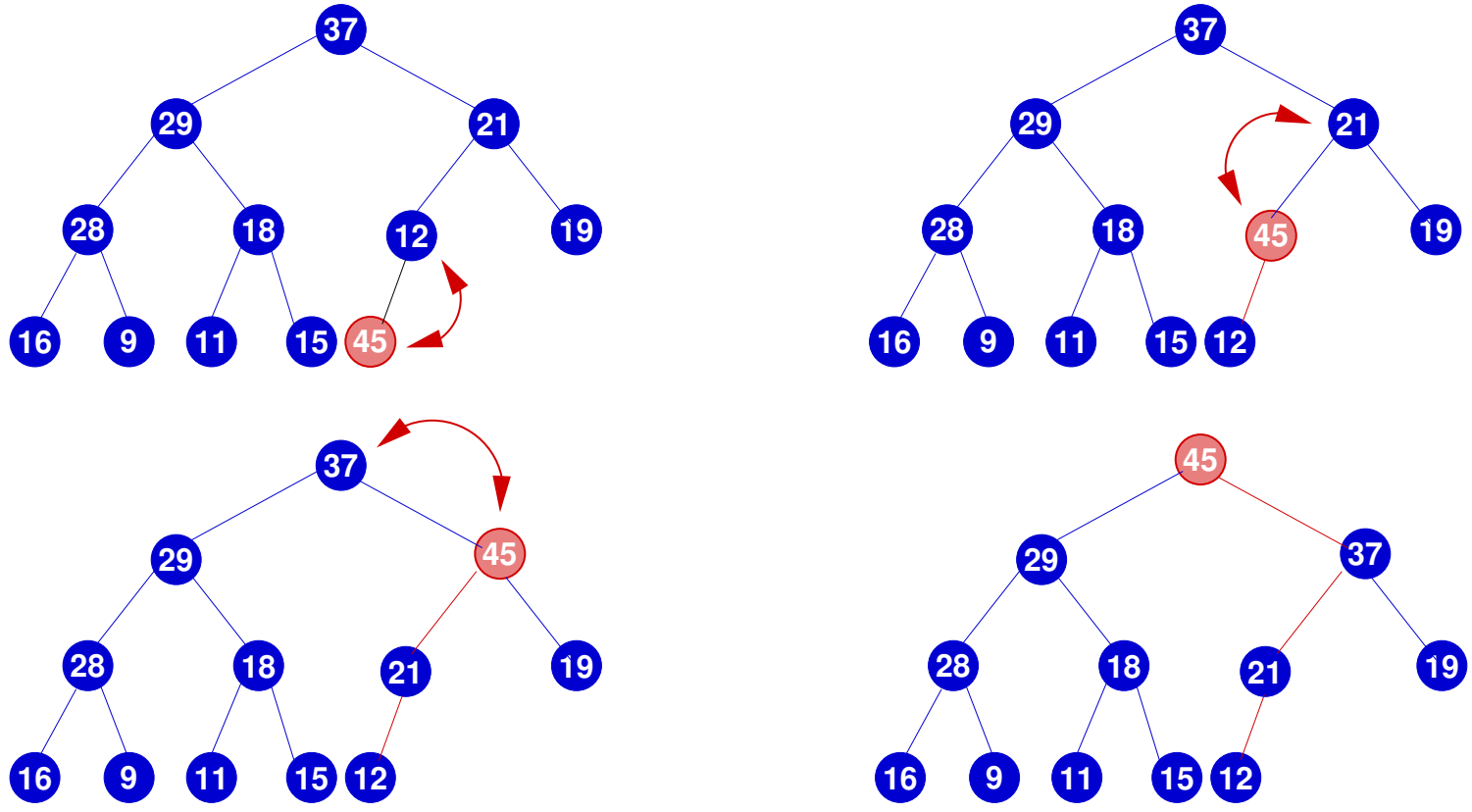
Tas : ajout d'un élément

Ajout d'une nouvelle dernière feuille en $\Theta(1)$



Tas : ajout d'un élément

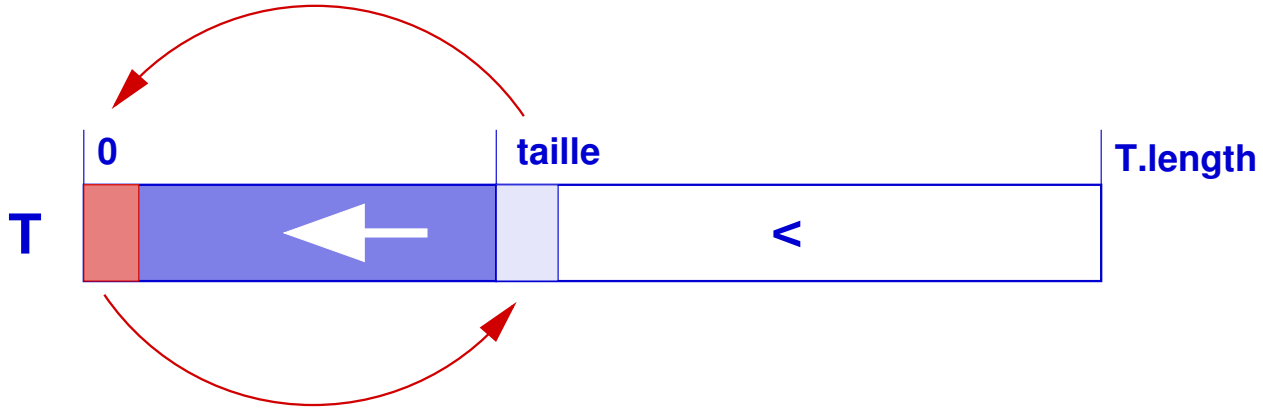
Reconstitution de l'ordre partiel en $O(\lg n)$



Tri par tas : principe

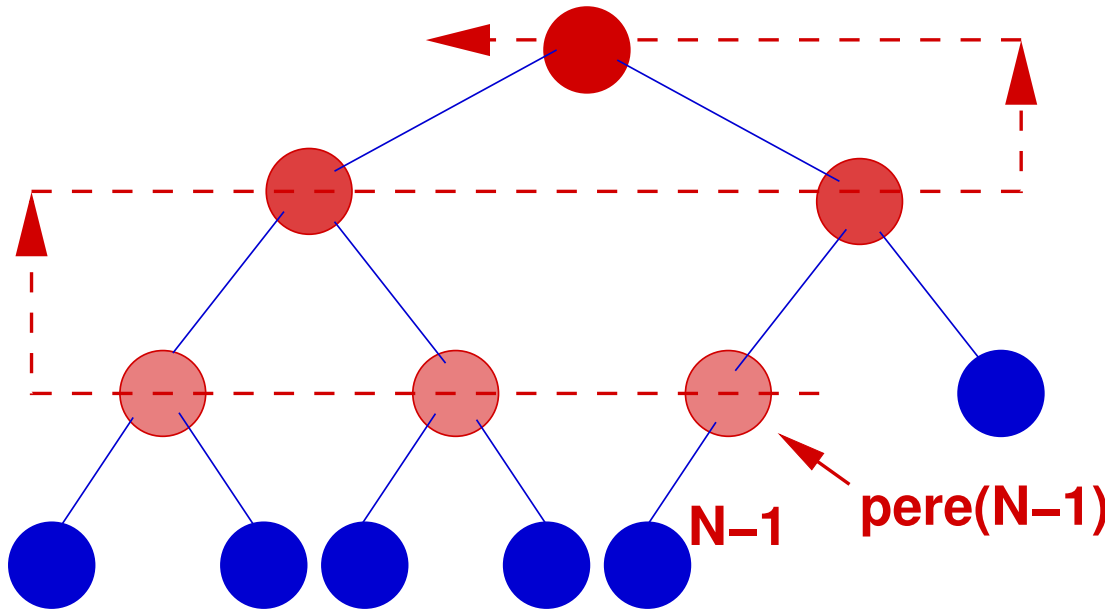
- **Construction du tas initial** :
  - arbre parfait : rien à faire, c'est le tableau !
  - ordre partiel : tasser l'arbre de bas en haut
- **le tri proprement dit** :

  `tant que` `le tas n'est pas vide` **`faire`** :



Tri par tas : le tas initial

Tasser tous les nœuds des feuilles vers la racine



Tri par tas : complexité

Complexité de la construction du tas initial

Soit $\mathcal{A}$ un arbre parfait de taille n (et de hauteur $\lfloor \lg n \rfloor$)

- un sous-arbre de hauteur h a sa racine à la profondeur $\lfloor \lg n \rfloor - h$
- $\Longrightarrow$ $\exists$ au plus $2^{\lfloor \lg n \rfloor - h}$ sous-arbres de hauteur h
- $\exists \alpha, 0 \leq \alpha < 1 \mid \lfloor \lg n \rfloor = \lg n - \alpha$
- $\Longrightarrow$ $2^{\lfloor \lg n \rfloor - h} = \frac{n}{2^{h+\alpha}} \leq \frac{n}{2^h}$
- $\Longrightarrow$ $\exists$ au plus $\lceil \frac{n}{2^h} \rceil$ sous-arbres de hauteur h

Tri par tas : complexité

Complexité de la construction du tas initial

- tasser un arbre de hauteur h s'effectue en $\Theta(h)$
- $\Longrightarrow$ la complexité de la construction du tas initial est bornée par

$$\sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \frac{n}{2^h}\Theta(h) = \Theta(n \sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \frac{h}{2^h}) \leq \Theta(n \sum_{h=0}^{\infty} hk^h) = \Theta(n \frac{k}{(1-k)^2})$$

avec $k = \frac{1}{2}$, soit $\Theta(2n) = \Theta(n)$

Tri par tas : complexité

Complexité du tri par tas

Pour trier un tableau de taille n

- construction initiale du tas bornée par $\Theta(n)$
- le tri propremement dit borné par $n\,\Theta(\lg n)$
- **le tri est en** $\Theta(n \lg n)$

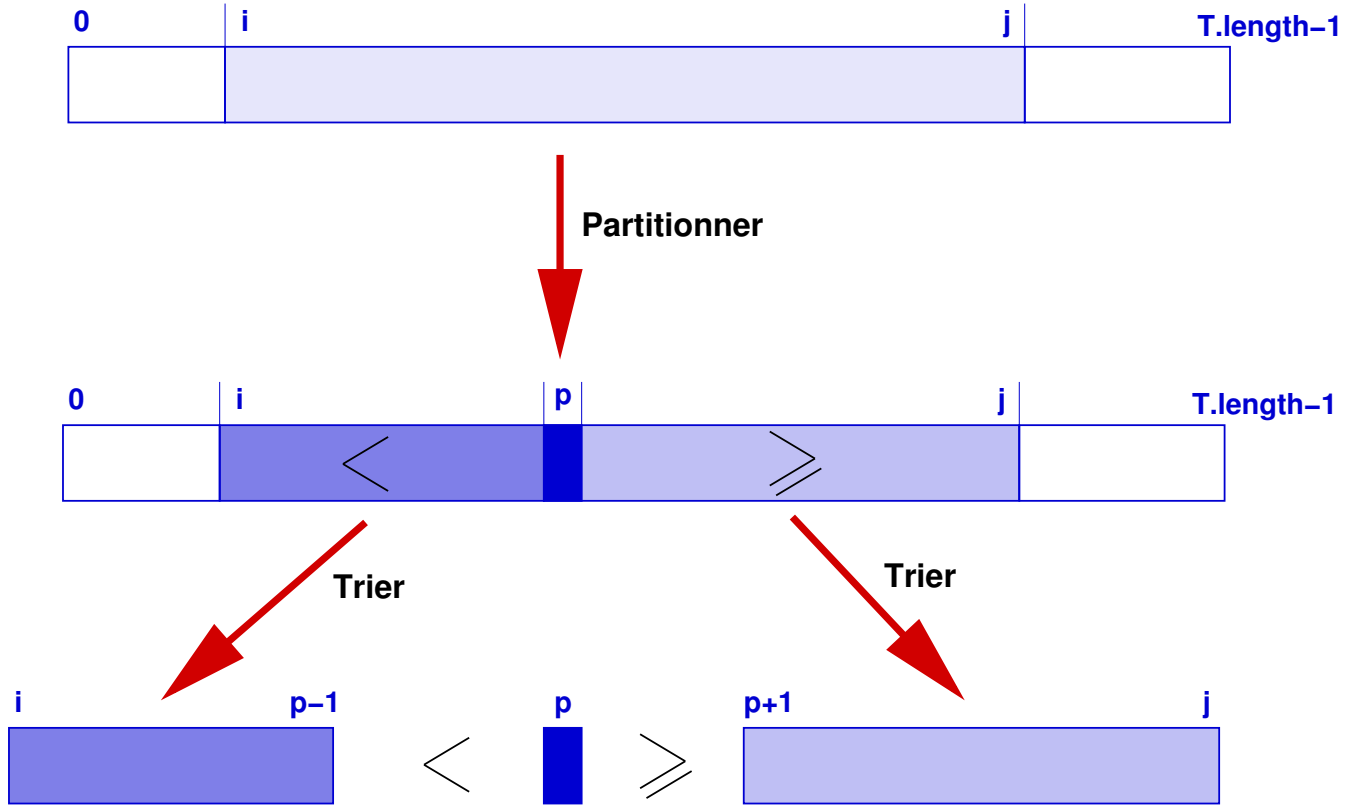
en moyenne et dans le pire des cas

Tri rapide : introduction

- *quicksort* en anglais
- inventé par Hoare en 1960
- appelé aussi *le tri des bijoutiers* ou *tri de perles*
- l'exemple le plus célèbre de la technique *diviser pour régner*
- basé sur des méthodes de partionnement de tableau
- tri en place
- un dérivé intéressant : la recherche d'un rang statistique

Tri rapide : principe

Tri récursif



Tri rapide : partition

Partition d'une tranche de tableau

Un algorithme conservatif qui déplace les éléments d'une tranche $T[i..j]$ et qui retourne l'indice p

de telle façon que

$$\forall g, i \leq g < p, \forall d, p < d \leq j, \mathrm{clef}(T[g]) < \mathrm{clef}(T[p]) \leq \mathrm{clef}(T[d])$$

sous les conditions

$$i \leq p \leq j$$

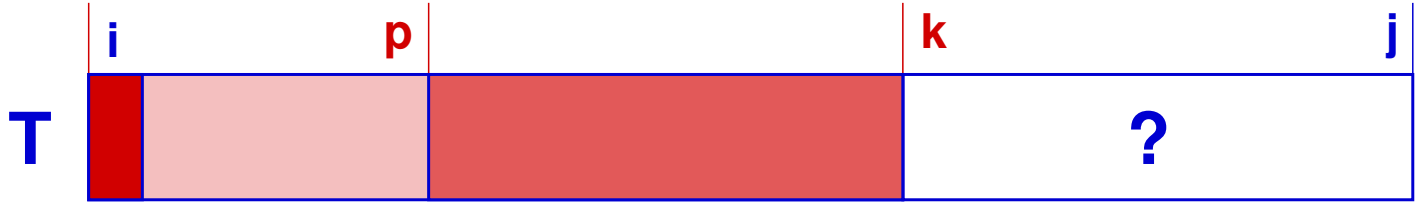
Tri rapide : partition

Partitionner

```
public int partitionner(int i, int j) {
    ObjetAClef pivot = T[i];
    int p = i;
    for ( int k = i+1; k <= j; k++ ) {
        if ( T[k].clef() < pivot.clef() ) {
            p++;
            echanger(p,k);
        }
    }
    echanger(i,p);
    return p;
}
```

Tri rapide : partition

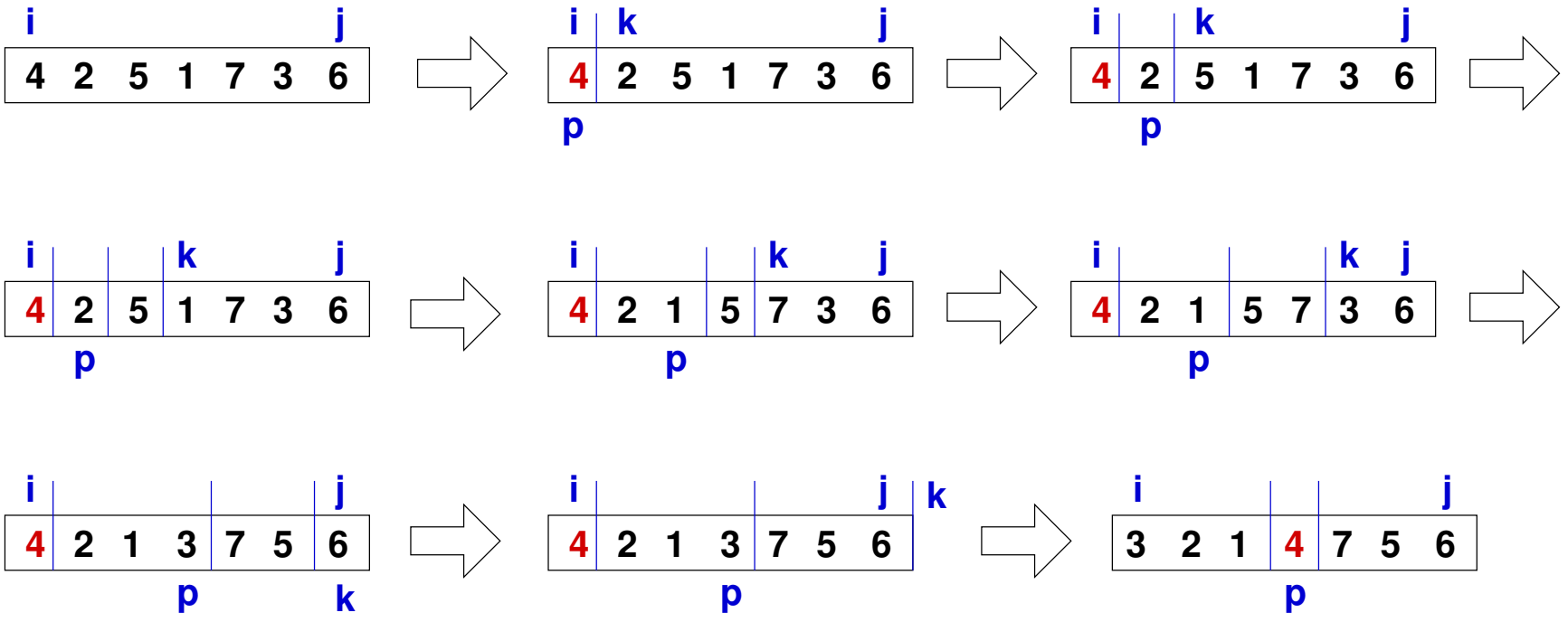
Invariant pour partitionner



- invariant : $\forall g, i+1 \leq g \leq p, \forall d, p < d < k,$
  $\mathrm{clef}(T[g]) < \mathrm{clef}(T[i]) \leq \mathrm{clef}(T[d])$
- traitement final :
  $T[i] \longleftrightarrow T[p] \implies \forall g, i \leq g < p, \forall d, p < d \leq j,$
  $\mathrm{clef}(T[g]) < \mathrm{clef}(T[p]) \leq \mathrm{clef}(T[d])$

Tri rapide : partition

Exemple



Tri rapide : le tri

Algorithme récursif sur une tranche de tableau

- la tranche de tableau a au plus un élément : ne fait rien
- la tranche de tableau a au moins deux éléments :
  - partitionner la tranche de tableau
  - trier récursivement les deux tranches issues du partitionnement
- le tri : appliquer sur la tranche égale au tableau entier

Tri rapide : méthodes

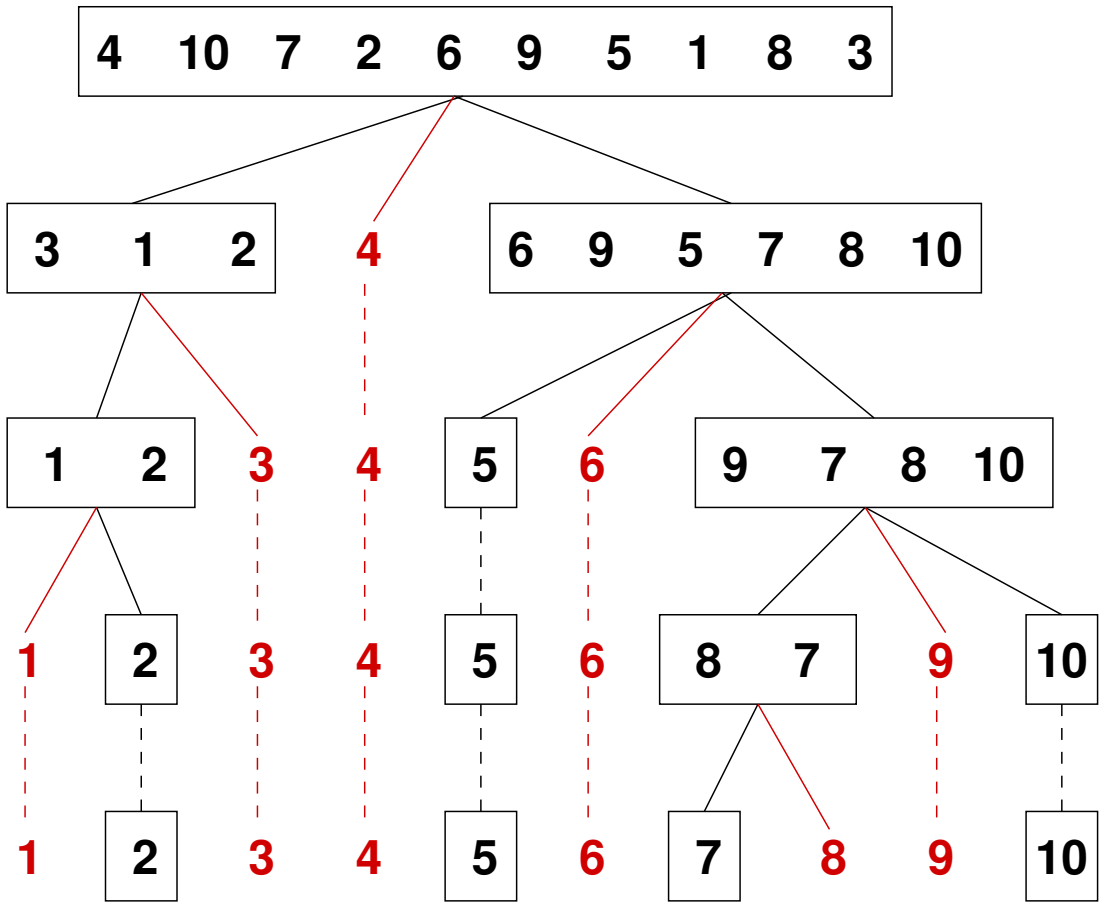
Méthode principale

```
public void trier() {
    trier(0,T.length - 1);
}
```

Méthode récursive

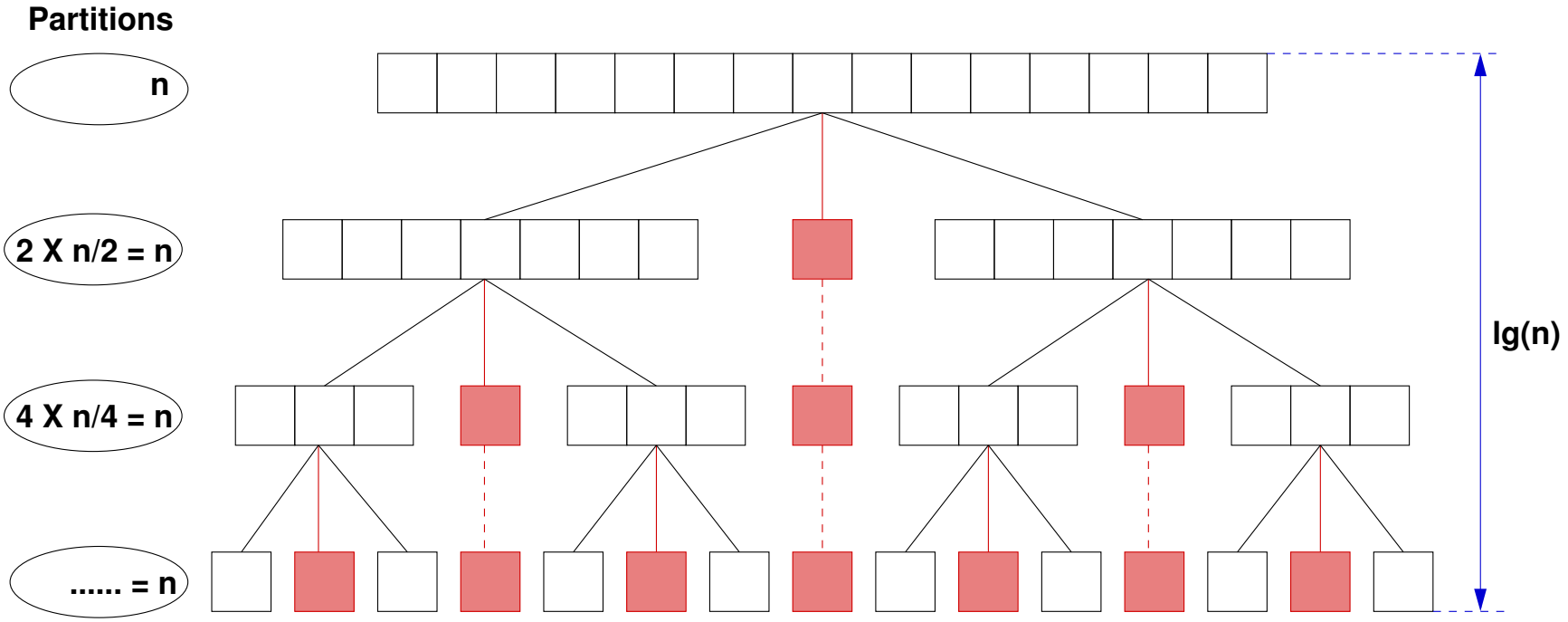
```
private void trier(int i, int j) {
    if ( i < j ) {
        int p = partitionner(i,j);
        trier(i,p-1);
        trier(p+1,j);
    }
}
```

Tri rapide : exemple



Tri rapide : complexité

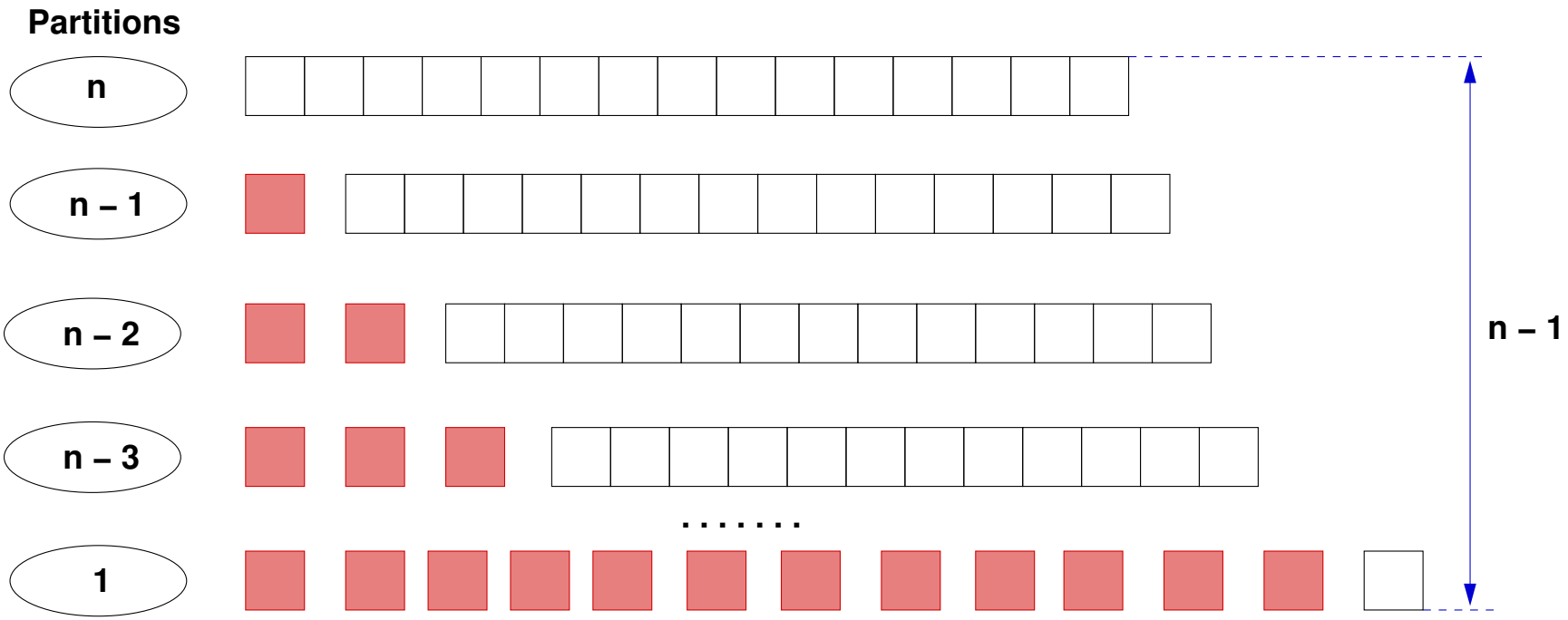
Meilleur des cas



$\Longrightarrow$ complexité $= \Theta(n \lg n)$

Tri rapide : complexité

Pire des cas



$\Longrightarrow$ complexité $= \Theta(n(n+1)/2) = \Theta(n^2)$

Tri rapide : complexité

- **meilleur des cas** : la méthode de partitionnement produit toujours deux tranches de taille égale

$$C(n) = 2C(\frac{n}{2}) + \Theta(n) \Longrightarrow C(n) = \Theta(n \lg n)$$

- **pire des cas** : la méthode de partitionnement produit toujours une tranche de longueur 0

$$C(n) = C(n-1) + \Theta(n) \Longrightarrow C(n) = \Theta(n^2)$$

- **en moyenne** : ?

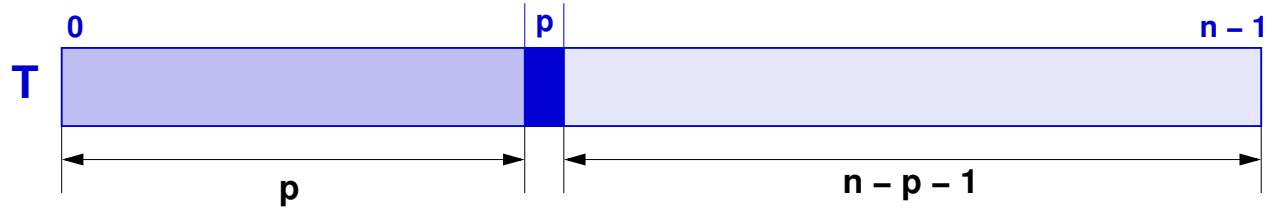
Tri rapide : complexité

Hypothèses de calcul de la complexité en moyenne

- on évalue C_n le nombre moyen de comparaisons entre les objets à clef durant le tri d'un tableau de taille n
- on évalue `trier` qui utilise `partitionner` qui effectue exactement $k-1$ comparaisons sur une tranche de longueur k
- les clefs des éléments du tableau sont toutes distinctes
- les places des éléments dans le tableau sont équiprobables

Tri rapide : complexité

Après l'appel à `partitionner` on a



- le nombre moyen de comparaisons effectuées par les deux appels récursifs est $C_p + C_{n-p-1}$
- la moyenne des quantités précédentes quand k varie est $\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}(C_p + C_{n-p-1})$
- `partitionner` effectue $n-1$ comparaisons

Tri rapide : complexité

La complexité en moyenne du tri rapide est

$$C_n = n - 1 + \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} (C_p + C_{n-p-1})$$

soit, par symmétrie

$$C_n = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{p=0}^{n-1} C_p$$

Solution : $C_n \approx 1,38 n \lg n$

Tri rapide : améliorations

Choix du pivot

Choix de l'élément médian parmi trois

Petites tranches

Utilisation d'un tri naïf (insertion) sur les tranches de longueur inférieure à k ($k \approx 20$)

Duplication des clefs

Nécessité d'une méthode de partition adaptée

Amélioration de près de 25% en moyenne sur le temps d'exécution par rapport à la version initiale

Rang : définition

Le k-ième rang statistique d'un tableau

- l'élément de rang k
- le k-ième plus petit élément
- l'élément d'indice $k-1$ dans le tableau trié

sous l'hypothèse

- toutes les clefs sont distinctes
- sinon, notion d'*un* rang statistique possible parmi r

Rang : méthodes

Méthode naïve

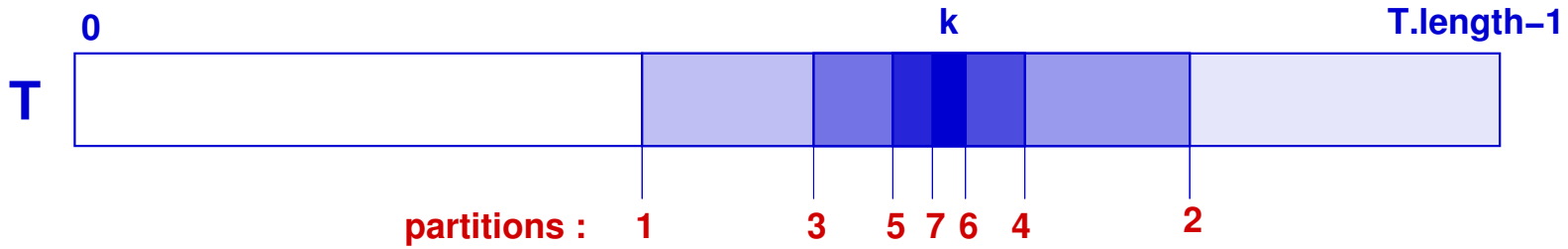
On trie le tableau en $\Theta(n \lg n)$ et on trouve le rang en $\Theta(1)$

Méthode rapide

Algorithme destructif basé sur le partitionnement

- les éléments du tableau sont conservés mais déplacés
- *moitié* du tri rapide
- à la fin, l'élément de rang k occupe la place qu'il occuperait dans le tableau trié, à l'indice $k - 1$

Rang : méthode rapide



- partitionner récursivement la tranche qui contient l'indice k
- on a trouvé k quand :
  - la tranche à partitionner est de longueur 1
  - l'indice du pivot est k (seulement avec la méthode `partitionner` présentée dans ce cours)

Rang : méthodes

Méthode principale

```
public ObjetAClef rang(int k) {
    return rang(0,T.length - 1,k - 1);
}
```

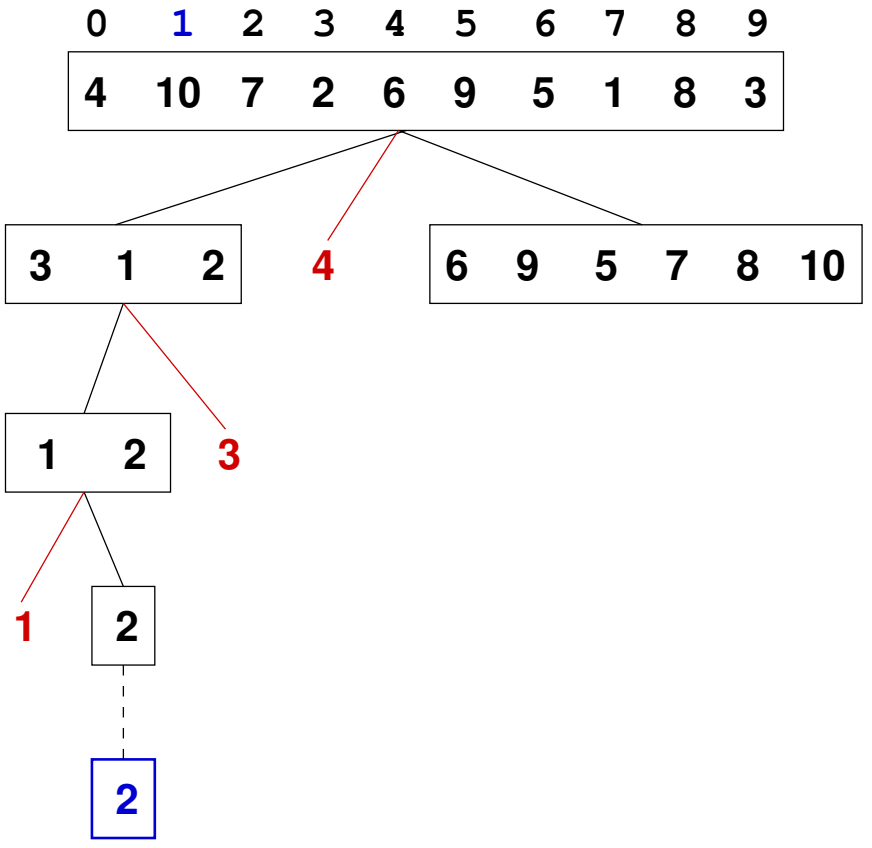
Méthode récursive

```
private ObjetAClef rang(int i, int j, int k) {
    if ( i == j ) return T[i];
    int p = partitionner(i,j);
    if ( k < p )  return rang(i,p-1,k);
    if ( k > p )  return rang(p+1,j,k);

    return T[p];
}
```

Rang : exemple

Recherche de l'élément de rang 2



Rang : complexité

- **meilleur des cas** : la méthode de partitionnement produit toujours deux tranches de taille égale

$$C_n = C_{\frac{n}{2}} + \Theta(n) \Longrightarrow C_n = \Theta(n)$$

- **pire des cas** : la méthode de partitionnement produit toujours une tranche de longueur 0 et le rang est dans la dernière tranche

$$C_n = C_{n-1} + \Theta(n) \Longrightarrow C_n = \Theta(n^2)$$

- **en moyenne** : ?

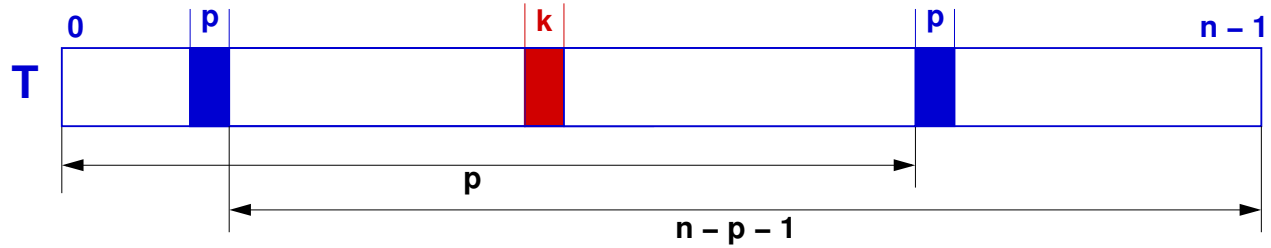
Rang : complexité

Hypothèses de calcul de la complexité en moyenne

- on évalue C_n le nombre moyen de comparaisons entre les objets à clef durant la recherche d'un rang dans un tableau de taille n
- on évalue `rang` qui utilise `partitionner` qui effectue exactement $k-1$ comparaisons sur une tranche de longueur k
- les clefs des éléments du tableau sont toutes distinctes
- équiprobabilité de la place des éléments

Rang : complexité

Après l'appel à `partitionner` on a



- le nombre moyen de comparaisons effectuées par l'un des deux appels récursifs est soit C_p soit C_{n-p-1}
- la moyenne des quantités précédentes quand p varie est $\frac{1}{n}(\sum_{p=0}^{k-1} C_{n-p-1} + \sum_{p=k+1}^{n-1} C_p)$
- `partitionner` effectue $n-1$ comparaisons

Rang : complexité

La complexité en moyenne de la recherche est

$$C_n = n - 1 + \frac{1}{n}(\sum_{p=0}^{k-1} C_{n-p-1} + \sum_{p=k+1}^{n-1} C_p)$$

soit, par symmétrie

$$C_n \leq n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{p=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{n-1} C_p$$

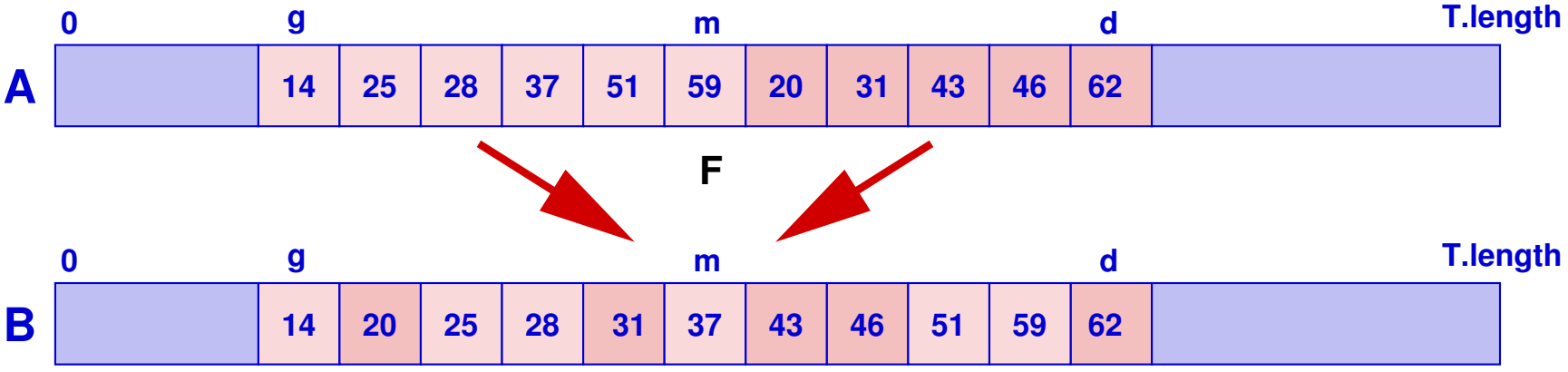
On montre par récurrence sur n que $C_n \leq O(n)$

Tri fusion : introduction

- *merge sort* en anglais
- inventé par John von Neumann en 1945
- un autre exemple standard de la technique *diviser pour régner*
- basé sur des méthodes de fusion de listes ou de tableaux
- nécessite un tableau auxiliaire (non en place)
- complexité de $\Theta(n \lg n)$ en moyenne, dans le pire et le meilleur des cas

Méthode de fusion

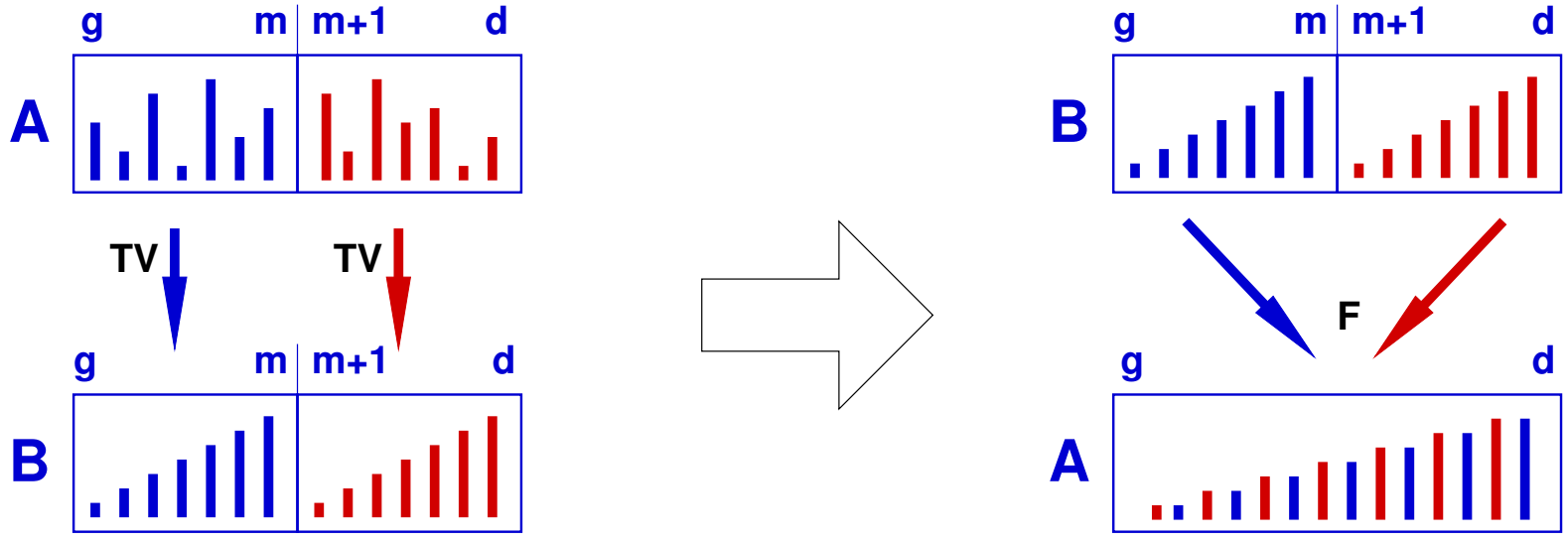
Un algorithme itératif **F** qui fusionne deux tranches triées $A[g..m]$ et $A[m+1..d]$ en une tranche triée auxiliaire $B[g..d]$ avec la complexité $\Theta(d-g+1)$



sous les conditions $g \leq m < d$

Tri fusion : principe

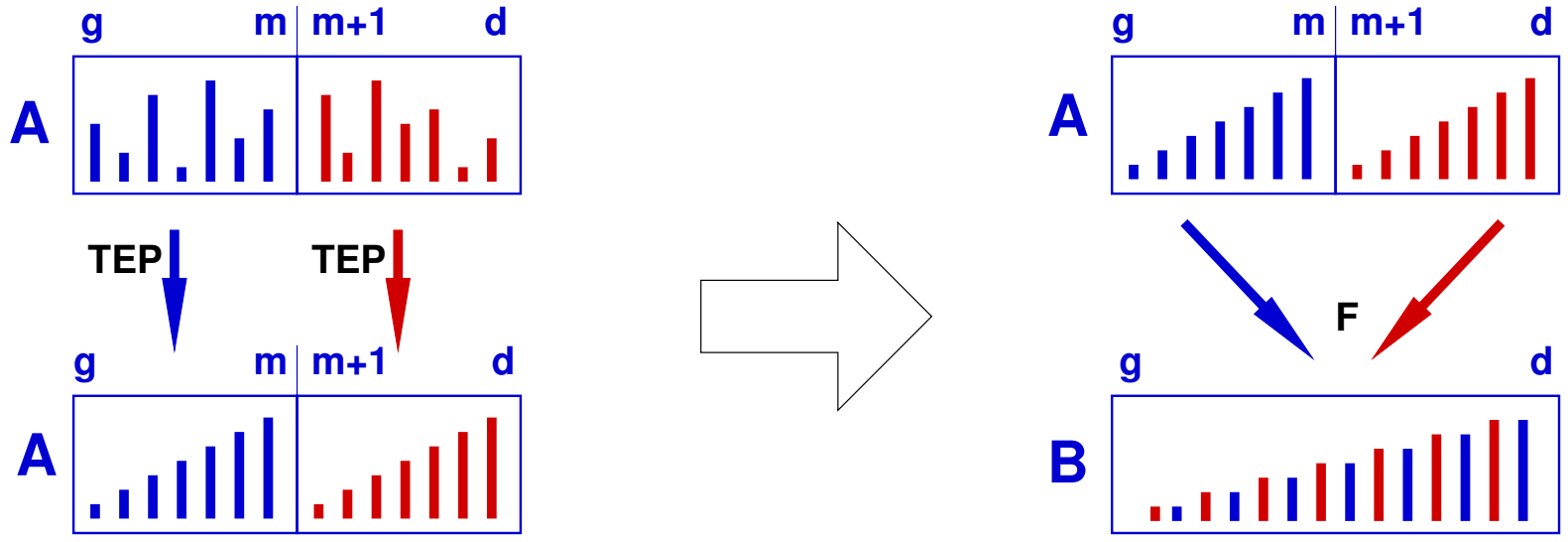
Tri En Place de $A[g..d]$ à l'aide de $B[g..d]$ (TEP)



où TV est le Tri de $A[i..j]$ Vers $B[i..j]$ et F la fusion

Tri fusion : principe

Tri de $A[g..d]$ Vers $B[g..d]$ (TV)



où TEP est le Tri En Place de $A[i..j]$ à l'aide de $B[i..j]$ et F la fusion

Optimalité des tris comparatifs

Tri comparatif

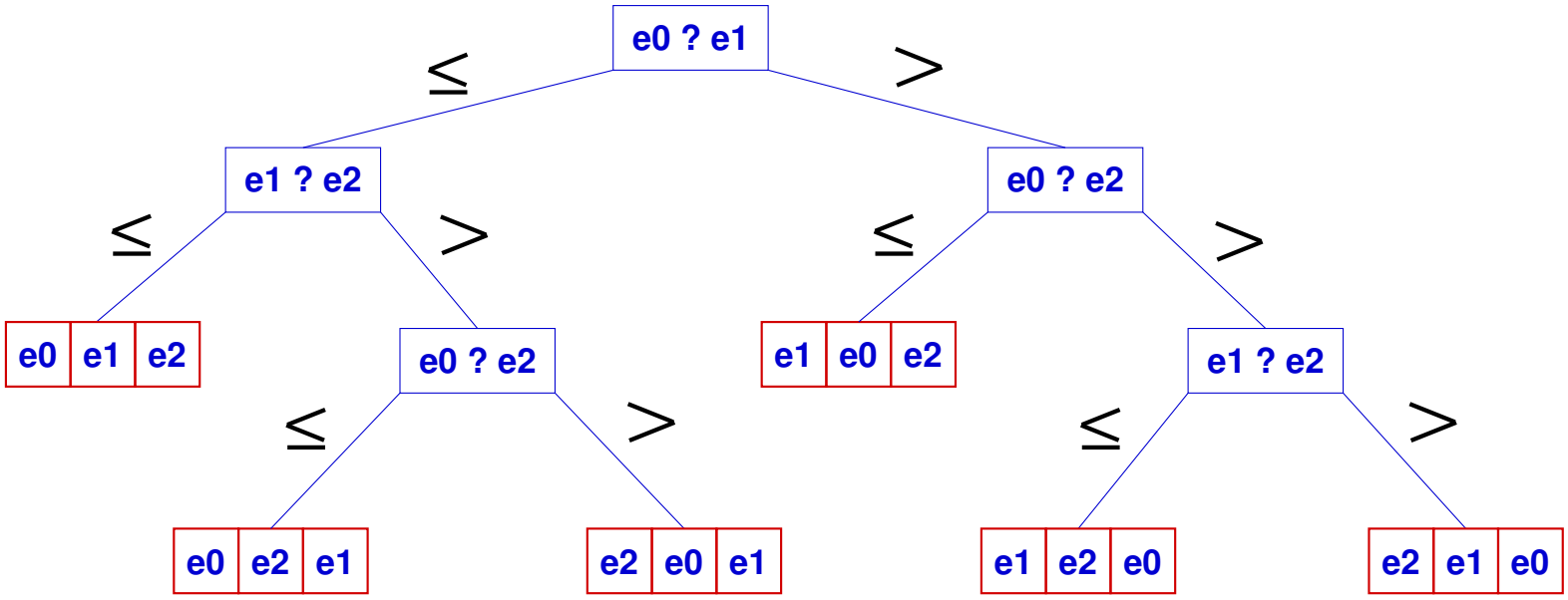
Aucune hypothèse sur les clefs des éléments à trier, nécessité de comparer les clefs entre elles

Algorithme de tri

- une suite de comparaisons de clefs suivant une certaine méthode
- un processus qui transforme un tableau $[e_0, e_1, ..., e_{n-1}]$ en un autre tableau $[e_{\sigma_0}, e_{\sigma_1}, ..., e_{\sigma_{n-1}}]$ où $(\sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_{n-1})$ est une permutation de $(0, 1, ..., n-1)$

Arbre de décision : exemple

Un algorithme de tri = un arbre binaire de décision



Arbre de décision du tri par insertion du tableau $[e_0, e_1, e_2]$

Arbre de décision : défintion

Un algorithme de tri = un arbre binaire de décision

- **feuille de l'arbre** : une permutation des éléments du tableau initial
- **tri** : le chemin de la racine à la feuille correspondant au tableau trié
- **hauteur de l'arbre** : le pire des cas pour le tri
- **bassesse de l'arbre** : le meilleur des cas pour le tri
- **hauteur moyenne de l'arbre** : la complexité en moyenne du tri

Arbre de décision : propriétés

- un arbre binaire de hauteur h a au plus 2^h feuilles (récurrence)
- le nombre de feuilles de l'arbre de décision est $n!$ où n est la taille du tableau à trier
- d'où $n! \leq 2^h \Longrightarrow \lg(n!) \leq h$. On a alors :

$$n! = \sqrt{2\pi n}(\tfrac{n}{e})^n(1 + \Theta(\tfrac{1}{n})) \Longrightarrow n! > (\tfrac{n}{e})^n$$
$$h \geq \lg(n!) > \lg((\tfrac{n}{e})^n) = n\lg n - n\lg e \Longrightarrow h = \Omega(n\lg n)$$

Un tri comparatif est en $\Omega(n\lg n)$ dans le pire des cas

Tris rapides : synthèse

- un **tri comparatif** ne peut pas avoir une complexité en moyenne ou dans le pire des cas meilleure que $\Theta(n \lg n)$
- le **tri par tas** est un tri comparatif optimal qui ne dégénère pas (sa complexité est $\Theta(n \lg n)$ dans tous les cas)
- le **tri rapide** est un tri comparatif optimal qui peut dégénérer mais qui est meilleur (par un petit facteur constant) en moyenne que le tri par tas
- le **tri fusion** est un un tri comparatif optimal qui ne dégénère pas mais qui nécessite un tableau annexe