ESSI 1re année — **Année 2003-2004**
Informatique théorique — **Langages Formels et Automates**

Minimisation

Corrigé partiel de la feuille de travaux dirigés n^{o}4

11 mars 2004

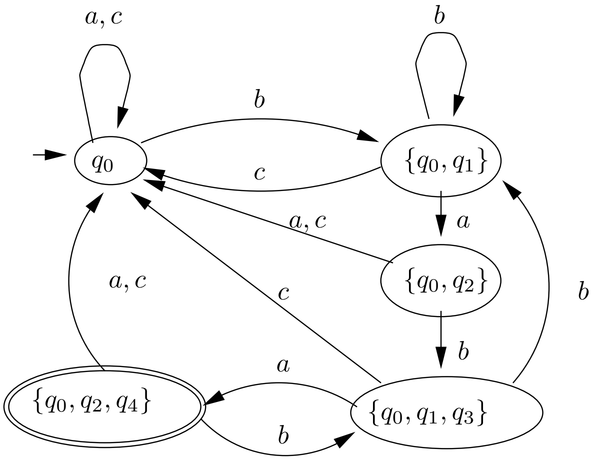
1.

a) Un automate non déterministe pour reconnaître L est

	a	b	c
$\rightarrow q_0$	q_0	$\{q_0, q_1\}$	q_0
q_1	q_2		
q_2		q_3	
q_3	q_4		
$\leftarrow q_4$			

b) La déterminisation de cet automate est donnée ci-dessous :

	a	b	c
$\rightarrow q_0$	q_0	$\{q_0, q_1\}$	q_0
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	q_0
$\{q_0, q_2\}$	q_0	$\{q_0, q_1, q_3\}$	q_0
$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_2, q_4\}$	$\{q_0, q_1\}$	q_0
$\leftarrow \{q_0, q_2, q_4\}$	q_0	$\{q_0, q_1, q_3\}$	q_0



c) Calcul de quotients gauches de $L = (a + b + c)^\star baba$:

$a^{-1}L = \quad L$
$b^{-1}L = \quad L + aba = M$
$c^{-1}L = \quad L$

On continue sur M :

$a^{-1}(L + aba) = \quad a^{-1}L + ba = L + ba = N$
$b^{-1}(L + aba) = \quad b^{-1}L + \varnothing = M$
$c^{-1}(L + aba) = \quad c^{-1}L + \varnothing = L$

On continue sur N :

$$
\begin{aligned}
a^{-1}(L+ba) &= a^{-1}L+\varnothing = L\\
b^{-1}(L+ba) &= b^{-1}L+a = L+aba+a = O\\
c^{-1}(L+ba) &= c^{-1}L+\varnothing = L
\end{aligned}
$$

On continue sur O :

$$
\begin{aligned}
a^{-1}(L+aba+a) &= a^{-1}L+ba+\varepsilon = L+ba+\varepsilon = P\\
b^{-1}(L+aba+a) &= b^{-1}L+\varnothing+\varnothing = M\\
c^{-1}(L+aba+a) &= c^{-1}L+\varnothing+\varnothing = L
\end{aligned}
$$

On termine par le calcul sur P :

$$
\begin{aligned}
a^{-1}(L+ba+\varepsilon) &= L+\varnothing+\varnothing = L\\
b^{-1}(L+ba+\varepsilon) &= b^{-1}L+a+\varnothing = O\\
c^{-1}(L+ba+\varepsilon) &= L+\varnothing+\varnothing = L
\end{aligned}
$$

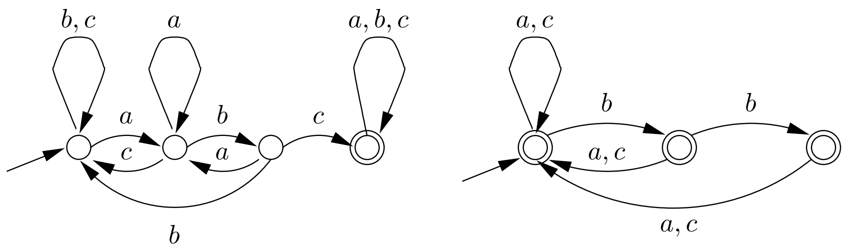
d) qui nous donne l'automate fini déterministe minimal suivant :

		a	b	c
$\rightarrow$	L	L	M	L
	M	N	M	L
	N	L	O	L
	O	P	M	L
$\leftarrow$	P	L	O	L

qui est celui que nous avions précedemment obtenu, à une renumérotation des états près.

2.

a) L est reconnu par l'automate a) et L' par b)



a) b)

b) Calcul de quotients gauches de $L' = ((\varepsilon+b+bb)(a+c)^{+})^{\star}(\varepsilon+b+bb)$:

Nous pouvons remarquer que le rôle des lettres a et c est identique, ce qui nous permet d'utiliser à leur place une lettre *générique* d. Ainsi nous avons $L' = ((\varepsilon+b+bb)d^{+})^{\star}(\varepsilon+b+bb)$.

Notons $T = \varepsilon+b+bb$, ainsi on a $L' = (Td^{+})^{\star}T$.

Nous pouvons préciser déja, que

$$
\begin{aligned}
d^{-1}T &= \varnothing\\
b^{-1}T &= \varepsilon+b = T'
\end{aligned}
$$

On commence avec L'

$$
\begin{aligned}
d^{-1}L' &= (d^{-1}(Td^{+}))(Td^{+})^{\star}T + d^{-1}T = (d^{-1}d^{+})(Td^{+})^{\star}T = d^{\star}(Td^{+})^{\star}T = d^{\star}L' = L'\\
b^{-1}L' &= (b^{-1}(Td^{+}))(Td^{+})^{\star}T + b^{-1}T = (b^{-1}T)d^{+}L' + (b^{-1}d^{+})(Td^{+})^{\star}T + T' = T'd^{+}L' + T' = L''
\end{aligned}
$$

On continue sur L'' :

$$
\begin{aligned}
d^{-1}L'' &= (d^{-1}T')d^{+}L' + d^{-1}d^{+}L' + d^{-1}T' = (d^{-1}d)d^{\star}L' = d^{\star}L' = L'\\
b^{-1}L'' &= (b^{-1}T')d^{+}L' + b^{-1}d^{+}L' + b^{-1}T' = d^{+}L' + \varepsilon = L'''
\end{aligned}
$$

On continue sur L''' :

$$
\begin{aligned}
d^{-1}L''' &= d^{-1}d^{+}L' = d^{\star}L' = L'\\
b^{-1}L''' &= b^{-1}d^{+}L' = \varnothing
\end{aligned}
$$

On termine par le calcul sur $\varnothing$:

$d^{-1}\varnothing = \quad \varnothing$

$b^{-1}\varnothing = \quad \varnothing$

Ce qui nous permet de retrouver l'automate donné précédemment.

Remarque : la partie *délicate* de ce calcul est l'égalité $d^\star L' = L'$ que l'on démontre par double inclusion :

– $d^\star L' \subset L'$

$d^\star (Td^+)^\star T = (Td^+)^\star T \cup d^+(Td^+)^\star T \subset L' \cup Td^+(Td^+)^\star T = L' \cup (Td^+)^+ T \subset L' \cup L' = L'$

– $L' \subset d^\star L'$ est évident, car $\varepsilon \in d^\star$.

c) Un automate non-déterministe pour reconnaître $L \cup L'$ est l'automate obtenu à partir des deux automates précédents où on ajoute un nouvel état initial et des ε-transitions vers les états initiaux.

d) Par des états produits.