Langages algébriques & Algorithme CYK

Corrigé partiel de la feuille de travaux dirigés n°13

25 mai 2004

1.

a) Supposons $L_1 = \{a^i b^j c^k \mid i < j < k\}$ algébrique, donc il existe n du lemme. Soit $z = a^n b^{n+1} c^{n+2}$. Par le lemme z s'écrit sous la forme $uvwx y$. Soit p (resp. q et r) le nombre de a (resp. b et c) dans vx .

Fait : $p = 0$ ou $r = 0$ (à cause de la longueur de vx).

On distingue les quatre cas suivants :

- $q \neq 0, p = 0$: $|uv^0wx^0y|_a = n$ et $|uv^0wx^0y|_b \leq n$ donc $uv^0wx^0y \notin L_1$.
- $q \neq 0, p \neq 0$: $r = 0$ et donc $|uv^2wx^2y|_c = n + 2$ et $|uv^2wx^2y|_b \geq n + 2$ donc $uv^2wx^2y \notin L_1$.
- $q = 0, p \neq 0$: $|uv^2wx^2y|_a \geq n + 1$ et $|uv^2wx^2y|_b = n + 1$ donc $uv^2wx^2y \notin L_1$.
- $q = 0, p = 0$: $r \neq 0$ (sinon $vx = \varepsilon$) donc $|uv^0wx^0y|_c \leq n + 1$ et $|uv^0wx^0y|_b = n + 1$ donc $uv^0wx^0y \notin L_1$.

Donc L_1 n'est pas algébrique.

Preuve utilisant le lemme d'Ogden : Supposons $L_1 = \{a^i b^j c^k \mid i < j < k\}$ algébrique, donc il existe n du lemme d'Ogden. Soit $z = a^n b^{n+1} c^{n+2}$, avec les lettres a marquées. Soit p (resp. q et r) le nombre de a (resp. b et c) dans vx . Ainsi, nous avons $p > 0$. Par ailleurs, on remarque que ni v ni x ne peuvent contenir deux lettres différentes, sinon, avec $i > 1$, $uv^iwx^i y$ contient plusieurs alternances entre les types de lettres. Ainsi nous avons $q = 0$ ou $r = 0$.

- $p \neq 0, q = 0$: $|uv^3wx^3y|_a \geq n + 2$ et $|uv^3wx^3y|_b = n + 1$ donc $uv^3wx^3y \notin L_1$.
- $p \neq 0, r = 0$: $|uv^3wx^3y|_a \geq n + 2$ et $|uv^3wx^3y|_c = n + 2$ donc $uv^3wx^3y \notin L_1$.

Donc L_1 n'est pas algébrique.

Autre preuve. Supposons $L_1 = \{a^i b^j c^k \mid i < j < k\}$ algébrique, donc il existe n du lemme de l'étoile. Soit $z = a^n b^{n+1} c^{n+2}$. Par le lemme z s'écrit sous la forme $uvwx y$. Soit p (resp. q et r) le nombre de a (resp. b et c) dans vx . $|uv^iwx^i y|_a = n + (i - 1)p$, $|uv^iwx^i y|_b = n + 1 + (i - 1)q$ et $|uv^iwx^i y|_c = n + 2 + (i - 1)r$. Pour $i = 0$, on a $p \geq q \geq r$ et, pour $i = 2$, $p \leq q \leq r$. On a donc $p = q = r$. Mais on doit avoir $p = 0$ ou $q = 0$, sinon $|vwx| \geq n + 3$. Donc $p = q = r = 0 \Rightarrow |vx| = 0$, une contradiction.

b) Supposons $L_2 = \{a^i b^j \mid j = i^2\}$ algébrique, donc il existe n du lemme de l'étoile. Soit $z = a^n b^{n^2}$. Par le lemme z s'écrit sous la forme $uvwx y$. Soit k (resp. l) le nombre de a (resp. b) dans vx . Comme on doit avoir $uv^iwx^i y \in L_2$, on doit avoir $\forall i \geq 0 : ((n - k) + ik)^2 = (n^2 - l) + il$, ce qui implique $\forall i \geq 0 : 2kn + (i - 1)k^2 = l$ ce qui est impossible. Donc L_2 n'est pas algébrique.

c) Supposons $L_3 = \{a^k b^k c^l \mid k \leq l \leq 2k\}$ algébrique, donc il existe n du lemme de l'étoile. Soit $z = a^n b^n c^n$. Par le lemme z s'écrit sous la forme $uvwx y$. Soit p (resp. q et r) le nombre de a (resp. b et c) dans vx .

Fait : $p = 0$ ou $r = 0$ (à cause de la longueur de vx).

- $r = 0$: $|uv^2wx^2y|_a > n$ ou $|uv^2wx^2y|_b > n$ alors que $|uv^2wx^2y|_c = n$ donc $uv^2wx^2y \notin L_3$.
- $r \neq 0$: donc $p = 0$ et ainsi $|uv^0wx^0y|_a = n$ et $|uv^0wx^0y|_c < n$ donc $uv^0wx^0y \notin L_3$.

Donc L_3 n'est pas algébrique.

Preuve utilisant le lemme d'Ogden : Supposons $L_3 = \{a^k b^k c^l \mid k \leq l \leq 2k\}$ algébrique, donc il existe n du lemme d'Ogden. Soit $z = a^n b^n c^n$, avec les lettres a du début de mot marquées. Soit p (resp. q et r) le nombre de a (resp. b et c) dans vx . Ainsi, nous avons $p > 0$. Par ailleurs, on remarque que ni v ni x ne peuvent contenir

deux lettres différentes, sinon, avec $i > 1$, $uv^iwx^i y$ contient plusieurs alternances entre les types de lettres. Ainsi nous avons $q = 0$ ou $r = 0$.

- $p \neq 0, q = 0$: uv^0wx^0y contient moins de n fois a en tête et $|uv^0wx^0y|_b = n$ donc $uv^0wx^0y \notin L_3$.
- $p \neq 0, r = 0$: uv^2wx^2y contient a^{n+1} en préfixe et seulement a^n en suffixe donc $uv^2wx^2y \notin L_3$.

Donc L_3 n'est pas algébrique.

d) $L_4 = c^*L_1$. Ce langage rappelle l'exemple du cours où il a fallu utiliser le lemme d'Ogden. On marque toutes les lettres sauf les c en tête du mot $z = c^k a^n b^{n+1} c^{n+2}$. On peut alors réutiliser la preuve de l'exercice 1 en raisonnant sur les lettres marquées.

Remarque : on aurait pu aussi utiliser le fait que $L_4 \cap a^*b^*c^* = L_1$, d'où la conclusion : L_4 n'est pas algébrique.

e) $L_5 = \bar{L}_1 \cap a^*b^*c^*$. On observe que $L_5 = \{a^i b^j c^k \mid i \geq j \text{ ou } j \geq k\} = \{a^i b^j \mid i \geq j\}c^* \cup a^*\{b^j c^k \mid j \geq k\}$ ce qui prouve (c.f. propriétés de clôture) que ce langage **est algébrique** (l'intersection avec $a^*b^*c^*$ ne sert que pour le tri des lettres).

f) Supposons $L_6 = \{ww^{-1}w \mid w \in (a+b)^*\}$ algébrique. Soit R le langage rationnel $a^*b^*a^*b^*$. Soit $L'_6 = L_6 \cap R$, i.e. le langage $\{a^i b^{2j} a^{2i} b^j \mid i \geq 0, j \geq 0\}$. On montre donc que L'_6 n'est pas algébrique. Supposons L'_6 algébrique, donc il existe n du lemme de l'étoile. Soit $z = a^n b^{2n} a^{2n} b^n$. Par le lemme, $z = uvwxy$ ou $z = ABCD$ avec $A = a^n$ $B = b^{2n}$ $C = a^{2n}$ $D = b^n$.

- vx contient un a : comme $|vwx| \leq n$, vwx ne peut pas intersecter à la fois A et C . Ainsi $uv^0wx^0y \notin L'_6$ car on supprime au moins un a du côté A ou du côté C .
- vx contient un b : comme $|vwx| \leq n$, vwx ne peut pas intersecter à la fois B et D . Ainsi $uv^0wx^0y \notin L'_6$ car on supprime au moins un b du côté B ou du côté D .

Donc L'_6 n'est pas algébrique et L_6 n'est pas algébrique.

g) $L_7 = \{w \in (a+b+c)^* : |w|_a = |w|_b = |w|_c\}$. Soit $R = a^*b^*c^*$ rationnel. $L_7 \cap R = \{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$ est non algébrique. Donc L_7 n'est pas algébrique.

		0	1	0	2	0	1	1
j=1		Z	U	Z	S	Z	U	U
j=2	k=1	-	-	-	W	-	-	-
j=3	k=1	-	-	S	-	-	-	-
	k=2	-	-	-	-	-	-	-
		-	-	S	-	-	-	-
j=4	k=1	-	-	-	-	-	-	-
	k=2	-	-	-	-	-	-	-
	k=3	-	-	V	-	-	-	-
		-	-	V	-	-	-	-
j=5	k=1	-	S	-	-	-	-	-
	k=2	-	-	-	-	-	-	-
	k=3	-	-	-	-	-	-	-
2.	k=4	-	-	-	-	-	-	-
		-	S	-	-	-	-	-
j=6	k=1	-	-	-	-	-	-	-
	k=2	-	-	-	-	-	-	-
	k=3	-	-	-	-	-	-	-
	k=4	-	-	-	-	-	-	-
	k=5	-	V	-	-	-	-	-
		-	-	-	-	-	-	-
j=7	k=1	-	-	-	-	-	-	-
	k=2	-	-	-	-	-	-	-
	k=3	-	-	-	-	-	-	-
	k=4	-	-	-	-	-	-	-
	k=5	-	-	-	-	-	-	-
	k=6	-	-	-	-	-	-	-

D'où : $0102011 \notin L(G)$.

Remarque : Ce résultat n'est pas surprenant ; la grammaire engendre $L(G) = \{w2w^{-1} | w \in (0+1)^*\}$.

Ainsi, les variables désignent :

- S - les palindromes impairs sur $\{0, 1\}$ avec 2 comme séparateur de milieu.
- Y - les palindromes impairs sur $\{0, 1\}$ avec 2 comme séparateur de milieu, suivis d'un 1.
- V - les palindromes impairs sur $\{0, 1\}$ avec 2 comme séparateur de milieu, suivis d'un 0.
- Z - 0 (comme zéro).
- U - 1 (comme un).

On peut vérifier ainsi les résultats du tableau de l'algorithme CYK.

		0	1	2	1	1
j=1		L,S,Y,X,Z	L,S,U,V,W	L,D,W,X	L,S,U,V,W	L,S,U,V,W
j=2	k=1		L,S,V,W	L,S,W,X	L,S,W	L,S,V,W
j=3	k=1		L,S	L	L,S	
	k=2		W,X	V,W	V,W	
			L,S,W,X	L,S,V,W	L,S,V,W	
j=4	k=1		L,S	L,S		
3.	k=2		-	-		
	k=3		V,W	W		
			L,S,V,W	L,S,W		
j=5	k=1		L,S			
	k=2		-			
	k=3		-			
	k=4		V,W			
			L,S,V,W			

D'où : $01211 \in L(G)$.

Remarque : La grammaire engendre le complémentaire du langage de l'exercice précédent.

Ainsi, les variables désignent :

- S - les mots non palindromes impairs sur $\{0, 1\}$ avec 2 comme séparateur de milieu.
- Y - les mots de S , suivis d'un 1.
- V - les mots de S , suivis d'un 0.
- W - mots quelconques, qui ne se terminent pas par un 0.
- X - mots quelconques, qui ne se terminent pas par un 1.
- L - mots quelconques, non vides.
- Z - 0 (comme zéro).
- U - 1 (comme un).
- D - 2 (comme deux).

On peut vérifier ainsi les résultats du tableau de l'algorithme CYK.