ESSI 1re année — **Année 2004-2005**
Informatique théorique — **Langages Formels et Automates**

Opérations, dénombrement, automates

Corrigé partiel de la feuille de travaux dirigés n^{o}1

24 février 2005

1. Tout mot de longueur 7 a au moins :

1. 1 facteur de longueur 0
2. 1 facteur de longueur 1
3. 1 facteur de longueur 2

   ⋮

8. 1 facteur de longueur 7

Ces facteurs sont 2 à 2 différents, donc tout mot de longueur 7 au moins 8 facteurs. Or il existe 3 mots ayant effectivement 8 facteurs, par exemple : $aaaaaaa$. Tout mot de longueur 7 a au plus :

1. 1 facteur de longueur 0
2. 3 facteurs de longueur 1 (car l'alphabet a 3 lettres)
3. 6 facteurs de longueur 2 (celui qui commence en position 1, celui qui commence en position 2, ...)
4. 5 facteurs de longueur 3 (idem)
5. 4 facteurs de longueur 4 (idem)
6. 3 facteurs de longueur 5 (idem)
7. 2 facteurs de longueur 6 (idem)
8. 1 facteur de longueur 7 (idem)

Un mot de longueur 7 a donc au plus 25 facteurs, et ce nombre est atteint si ces facteurs peuvent être 2 à 2 différents. Or il existe des mots pour lesquels c'est possible et donc ayant effectivement 25 facteurs, par exemple : $v = abcacba$. En effet, pour v les facteurs de longueur 2 sont 2 à 2 différents ce qui implique que tous les facteurs (de longueur au moins 2) sont 2 à 2 différents.

2.
b) $L_1^+(L_1^\star \cup L_0^\star) = L_1^+L_1^\star \cup L_1^+L_0^\star$
Oui : distributivité de la concaténation par rapport à l'union.
$L_1^+(L_1^+ \cap L_0^\star) = L_1^+L_1^+ \cap L_1^+L_0^\star$
Non : car $(L_1^+ \cap L_0^\star) = \emptyset$ et donc $L_1^+(L_1^+ \cap L_0^\star) = \emptyset$. Par ailleurs, comme $\varepsilon \in L_0^\star$, on a : $L_1^+L_1^+ \cap L_1^+L_0^\star \subset L_1^+L_1^+$ et donc un ensemble non-vide.
c)La distributivité de la concaténation par rapport à l'union assure que la première égalité est vraie. La deuxième égalité est fausse (car déjà fausse précédemment !). On peut en donner un autre contre-exemple : $L = \{a, b, bc\}$ et $M = \{a, c\}$. En effet, il est immédiat que $(L^+ \cap M^\star) = a^+$. Et donc $abc \notin L^+(L^+ \cap M^\star)$, alors que abc appartient à $L^+L^+ \cap L^+M^\star$.

3.
a) C'est le nombre d'applications d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments, i.e. n^p.

b) Il y a $(n-1)^p$ mots de longueur p ne contenant pas la lettre a, donc il y a $n^p \; - \; (n-1)^p$ mots de longueur p contenant la lettre a.
c) Il y p possibilités pour insérer une (unique) lettre a dans un mot de longueur $p-1$ ne contenant pas de lettre a, d'où $p \times (n-1)^{p-1}$ mots contenant exactement une occurrence de la lettre a.
d) On prend toutes les parties à q éléments de l'ensemble à p éléments des positions dans un mot de longueur p (c'est C_p^q). Ces q positions choisies sont celles des a, il reste à mettre ailleurs un mot quelconque (sans a) de longueur $p-q$, d'où $C_p^q \; \times \; (n-1)^{p-q}$ mots ayant exactement q occurrences dela lettre a.
e) Appelons s_p le nombre de mots de longueur p où chacune des 3 lettres de l'alphabet apparaît au moins une fois (on peut voir s_p comme le nombre de surjections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à 3 éléments). Notons par t_p le nombre de mots de longueur p où chacune des 2 lettres d'un alphabet apparaît au moins une fois et par u_p le nombre de mots de longueur p où l'unique lettre d'un alphabet de taille 1 apparaît au moins une fois. Il y a 3^p mots de longueur p (sur un alphabet à 3 éléments $\{a, b, c\}$), et on a la relation :

$$s_p = 3^p - (3t_p \; + \; 3u_p).$$

En effet, parmi les mots de longueur p il faut enlever :
– les mots écrits avec exactement 2 lettres (il y a 3 possibilités pour prendre ces ensembles de 2 lettres)
– les mots écrits avec exactement 1 lettre (il y a 3 possibilités pour prendre ces ensembles de 1 lettre)
Il reste à calculer t_p et u_p et on a :
$t_p = 2^p - 2u_p$ et
$u_p = 1$
Ce qui donne : $s_p = 3^p \; - \; 3 \times 2^p \; + \; 3$

4. Considérant un alphabet à n lettres comme un ensemble de chiffres représentant les entiers de 1 à n, tout mot de Σ^+ est alors l'écriture d'un entier en base n. Il y a donc une injection de Σ^+ (et donc de Σ^*) vers $\mathbb{N}$, d'où Σ^* est dénombrable.

5. Non. En effet, si L est vide ou L est $\{\varepsilon\}$, alors L^* est $\{\varepsilon\}$.

6. D'une part tout mot de L^* est de longueur paire. D'autre part tout mot de longueur paire se factorise par paquets de 2 lettres et chacun de ces paquets est dans L, donc tout mot de longueur paire est dans L^*. La concaténation de 2 mots de longueur impaire est un mot de longueur paire, on ne peut donc pas avoir un langage X^* ne contenant que des mots de longueur impaire.