

Automates finis et expressions rationnelles

Corrigé partiel de la feuille de travaux dirigés n°3

10 mars 2005

1.

Le tableau des $r_{i,j}^k$ se présente ainsi :

k	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$r_{1,1}^k$	ε			
$r_{1,2}^k$	0	0	$0(00)^*$	$0(00)^* + 0^*1((0+1)0^*1)^*(0+1)(00)^*$
$r_{1,3}^k$	1	1	0^*1	$0^*1((0+1)0^*1)^*$
$r_{2,1}^k$	0			
$r_{2,2}^k$	ε	$\varepsilon + 00$		
$r_{2,3}^k$	1	$1 + 01$		
$r_{3,1}^k$	$\emptyset$			
$r_{3,2}^k$	Σ	Σ	$(0+1)(00)^*$	
$r_{3,3}^k$	ε	ε	$\varepsilon + (0+1)0^*1$	

Ce qui permet de conclure que l'expression rationnelle cherchée est :

$$L(A) = r_{12}^3 + r_{13}^3 = 0(00)^* + 0^*1((0+1)0^*1)^*(0+1)(00)^* + 0^*1((0+1)0^*1)^*$$

2.

b) Le système d'équations de droite associé à l'automate est :

$$\begin{cases} Y_0 = 1Y_0 + 0Y_1 \\ Y_1 = \varepsilon + 0Y_2 + 1Y_3 \\ Y_2 = \varepsilon + 0Y_1 + 1Y_2 \\ Y_3 = 0Y_1 + 1Y_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_3 = 1^*0Y_1 \\ Y_0 = 1Y_0 + 0Y_1 \\ Y_1 = \varepsilon + 0Y_2 + 1^+0Y_1 \\ Y_2 = \varepsilon + 0Y_1 + 1Y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_2 = 1^*(\varepsilon + 0Y_1) \\ Y_0 = 1^*0Y_1 \\ Y_1 = \varepsilon + 01^* + 01^*0Y_1 + 1^+0Y_1 = (\varepsilon + 01^*) + (01^*0 + 1^+0)Y_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1 = (01^*0 + 1^+0)^*(\varepsilon + 01^*) \\ Y_0 = 1^*0Y_1 \end{cases}$$

D'où

$$L(B) = 1^*0(01^*0 + 1^+0)^*(\varepsilon + 01^*)$$

Par hasard on vient d'obtenir le même résultat que dans l'autre version !

c) Le système d'équations de gauche associé à l'automate est :

$$\begin{cases} Z_0 = \varepsilon + Z_01 = 1^* \\ Z_1 = Z_00 + Z_30 + Z_20 = 1^*0 + (Z_2 + Z_3)0 \\ Z_2 = Z_10 + Z_21 = Z_101^* \\ Z_3 = Z_11 + Z_31 = Z_111^* \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_1 = 1^*0 + (Z_101^* + Z_111^*)0 = 1^*0 + Z_1(01^*0 + 1^+0) \\ Z_2 = Z_101^* \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_1 = 1^*0(01^*0 + 1^+0)^* \\ Z_2 = 1^*0(01^*0 + 1^+0)^*01^* \end{cases}$$

D'où

$$L(B) = (1^*0(01^*0 + 1^+0)^*)(01^* + \varepsilon)$$

3. On obtient le système suivant

$$\begin{cases} Z_1 = \varepsilon + Z_2a + Z_3b \\ Z_2 = Z_1a + Z_4b \\ Z_3 = Z_1b + Z_4a \\ Z_4 = Z_2b + Z_3a \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_1 = \varepsilon + Z_1aa + Z_4ba + Z_1bb + Z_4ab = \varepsilon + Z_1(aa + bb) + Z_4(ab + ba) \\ Z_4 = Z_1ab + Z_4bb + Z_1ba + Z_4aa = Z_1(ab + ba) + Z_4(aa + bb) \end{cases}$$

$$\{ Z_4 = Z_1(ab + ba)(aa + bb)^* \}$$

$$\{ Z_1 = \varepsilon + Z_1((aa + bb) + (ab + ba)(aa + bb)^*(ab + ba)) \}$$

$$\{ Z_1 = ((aa + bb) + (ab + ba)(aa + bb)^*(ab + ba))^* \}$$

Un système d'équations de droite permettrait d'obtenir la même chose :

$$\begin{cases} Y_1 = \varepsilon + aY_2 + bY_3 \\ Y_2 = aY_1 + bY_4 \\ Y_3 = bY_1 + aY_4 \\ Y_4 = bY_2 + aY_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1 = \varepsilon + aaY_1 + abY_4 + bbY_1 + baY_4 = \varepsilon + (aa + bb)Y_1 + (ab + ba)Y_4 \\ Y_4 = baY_1 + bbY_4 + abY_1 + aaY_4 = (aa + bb)Y_4 + (ab + ba)Y_1 \end{cases}$$

$$\{ Y_4 = (aa + bb)^*(ab + ba)Y_1 \}$$

$$\begin{cases} Y_1 = \varepsilon + (aa + bb)Y_1 + (ab + ba)(aa + bb)^*(ab + ba)Y_1 \\ = \varepsilon + ((aa + bb) + (ab + ba)(aa + bb)^*(ab + ba))Y_1 \end{cases}$$

$$\{ Y_1 = ((aa + bb) + (ab + ba)(aa + bb)^*(ab + ba))^* \}$$