Automates à piles & grammaires

Corrigé partiel de la feuille de travaux dirigés n^{o}12

2 juin 2005

1. $G = [V, T, P, S]$, avec
$V = \{S, (q_0, Z, q_0), (q_0, Z, q_1), (q_0, X, q_0), (q_0, X, q_1), (q_1, Z, q_0), (q_1, Z, q_1), (q_1, X, q_0), (q_1, X, q_1)\}$,
$T = \{0, 1\}$, et P contenant les règles :

- Pour l'axiome
  $S \rightarrow (q_0, Z, q_0) \mid (q_0, Z, q_1)$
- A partir de la transition 1
  $(q_0, Z, q_0) \rightarrow\ 1(q_0, X, q_0)(q_0, Z, q_0) \mid 1(q_0, X, q_1)(q_1, Z, q_0)$
  $(q_0, Z, q_1) \rightarrow\ 1(q_0, X, q_0)(q_0, Z, q_1) \mid 1(q_0, X, q_1)(q_1, Z, q_1)$
- A partir de la transition 2
  $(q_0, X, q_0) \rightarrow\ 1(q_0, X, q_0)(q_0, X, q_0) \mid 1(q_0, X, q_1)(q_1, X, q_0)$
  $(q_0, X, q_1) \rightarrow\ 1(q_0, X, q_0)(q_0, X, q_1) \mid 1(q_0, X, q_1)(q_1, X, q_1)$
- A partir de la transition 3
  $(q_0, X, q_0) \rightarrow\ 0(q_1, X, q_0)$
  $(q_0, X, q_1) \rightarrow\ 0(q_1, X, q_1)$
- A partir de la transition 4
  $(q_0, Z, q_0) \rightarrow \varepsilon$
- A partir de la transition 5
  $(q_1, X, q_1) \rightarrow 1$
- A partir de la transition 6
  $(q_1, Z, q_0) \rightarrow 0(q_0, Z, q_0)$
  $(q_1, Z, q_1) \rightarrow\ 0(q_0, Z, q_1)$

En notant $A = (q_0, Z, q_0)$; $B = (q_0, Z, q_1)$; $C = (q_0, X, q_0)$; $D = (q_0, X, q_1)$; $E = (q_1, Z, q_0)$; $F = (q_1, Z, q_1)$; $G = (q_1, X, q_0)$; $H = (q_1, X, q_1)$ nous obtenons :

$$N = \{S, A, B, C, D, E, F, H\},\ T = \{0, 1\},\ S$$

$$P \begin{cases} S \rightarrow A \mid B \\ A \rightarrow 1CA \mid 1DE \mid \varepsilon \\ B \rightarrow 1CB \mid 1DF \\ C \rightarrow 0G \mid 1CC \mid 1DG \\ D \rightarrow 0H \mid 1CD \mid 1DH \\ E \rightarrow 0A \\ F \rightarrow 0B \\ H \rightarrow 1 \end{cases}$$

Les variables productives sont : $\{A, H, S, D, E\}$, ce qui permet de supprimer B, C, F, G et nous obtenons :

$N = \{S, A, D, E, H\},\ T = \{0, 1\},\ S$

$$P \begin{cases} S \to A \\ A \to 1DE \mid \varepsilon \\ D \to 0H \mid 1DH \\ E \to 0A \\ H \to 1 \end{cases}$$

Tous les variables sont accessibles. On peut supprimer A (renommage) et substituer H et E pour obtenir :

$N = \{S, D\},\ T = \{0, 1\},\ S$

$$P \begin{cases} S \to 1D0S \mid \varepsilon \\ D \to 01 \mid 1D1 \end{cases}$$

D engendre $L_D = \{1^k01^{k+1} \mid k \geq 0\}$, ainsi $1D0$ engendre $L_{1D0} = \{1^{k+1}01^{k+1}0 \mid k \geq 0\}$. Ainsi, S engendre $L^\star_{1D0}$.

2. Un automate à pile du TD précédent était : $M = [\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{1, 2, +, =\}, \{Z, X, Y\}, q_0, \emptyset, Z, \delta]$

état	lecture	pile	nouvel état	empiler
q_0	1	Z	q_0	YZ
q_0	2	Z	q_0	YXZ
q_0	$+$	Y	q_0	X
q_0	1	X	q_0	YX
q_0	2	X	q_0	YXX
q_0	$=$	Y	q_1	X

état	lecture	pile	nouvel état	empiler
q_1	1	X	q_3	$-$
q_3	ε	X	q_1	Y
q_1	2	X	q_2	$-$
q_2	ε	X	q_3	$-$
q_1	$+$	Y	q_1	X
q_3	ε	Z	q_3	$-$

Quelle est la grammaire qui correspond à cet automate à pile ? $G = [V, T, P, S]$, avec $V = \{S, Z_{i,j}, X_{i,j}, Y_{i,j}\}$ où $Z_{i,j}$ désigne (q_i, Z, q_j), $X_{i,j}$ désigne (q_i, X, q_j) et $Y_{i,j}$ désigne (q_i, Y, q_j). $T = \{1, 2, +, =\}$, et P :

- Pour l'axiome
  $S \to\ Z_{0,i}$ pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$
- A partir de la transition 1
  $Z_{0,i} \to\ 1Y_{0,j}Z_{j,i}$ pour $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$
- A partir de la transition 2
  $Z_{0,i} \to\ 2Y_{0,j}X_{j,k}Z_{k,i}$ pour $i, j, k \in \{0, 1, 2, 3\}$
- A partir de la transition 3
  $Y_{0,i} \to\ +X_{0,i}$ pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$
- A partir de la transition 4
  $X_{0,i} \to\ 1Y_{0,j}X_{j,i}$ pour $i, j, k \in \{0, 1, 2, 3\}$
- A partir de la transition 5
  $X_{0,i} \to\ 2Y_{0,j}X_{j,k}X_{k,i}$ pour $i, j, k \in \{0, 1, 2, 3\}$
- A partir de la transition 6
  $Y_{0,i} \to = X_{1,i}$ pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$
- A partir de la transition 7
  $X_{1,3} \to\ 1$
- A partir de la transition 8
  $X_{3,i} \to\ Y_{1,i}$ pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$
- A partir de la transition 9
  $X_{1,2} \to\ 2$
- A partir de la transition 10
  $X_{2,3} \to\ \varepsilon$
- A partir de la transition 11
  $Y_{1,i} \to\ +X_{1,i}$pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$
- A partir de la transition 12
  $Z_{3,3} \to\ \varepsilon$

Les variables productives sont : $\{S, X_{0,2}, X_{0,3}, X_{1,2}, X_{1,3}, X_{2,3}, X_{3,2}, X_{3,3}, Y_{0,2}, Y_{0,3}, Y_{1,2}, Y_{1,3}, Z_{0,3}, Z_{3,3}\}$:

$N = \{S, X_{0,2}, X_{0,3}, X_{1,2}, X_{1,3}, X_{2,3}, X_{3,2}, X_{3,3}, Y_{0,2}, Y_{0,3}, Y_{1,2}, Y_{1,3}, Z_{0,3}, Z_{3,3}\},\ T = \{1, 2, +, =\},\ S$

$$P\left\{\begin{array}{l}
S \rightarrow Z_{0,3}\\
Z_{0,3} \rightarrow\ 1Y_{0,3}Z_{3,3} \mid 2Y_{0,2}X_{2,3}Z_{3,3} \mid 2Y_{0,3}X_{3,3}Z_{3,3}\\
Y_{0,2} \rightarrow\ +X_{0,2} \mid\ = X_{1,2}\\
Y_{0,3} \rightarrow\ +X_{0,3} \mid\ = X_{1,3}\\
X_{0,2} \rightarrow\ 1Y_{0,3}X_{3,2} \mid 2Y_{0,2}X_{2,3}X_{3,2} \mid 2Y_{0,3}X_{3,3}X_{3,2}\\
X_{0,3} \rightarrow\ 1Y_{0,2}X_{2,3} \mid 1Y_{0,3}X_{3,3} \mid 2Y_{0,2}X_{2,3}X_{3,3} \mid 2Y_{0,3}X_{3,2}X_{2,3} \mid 2Y_{0,3}X_{3,3}X_{3,3}\\
X_{1,3} \rightarrow\ 1\\
X_{3,2} \rightarrow\ Y_{1,2}\\
X_{3,3} \rightarrow\ Y_{1,3}\\
X_{1,2} \rightarrow\ 2\\
X_{2,3} \rightarrow\ \varepsilon\\
Y_{1,2} \rightarrow\ +X_{1,2}\\
Y_{1,3} \rightarrow\ +X_{1,3}\\
Z_{3,3} \rightarrow\ \varepsilon
\end{array}\right.$$

Toutes les variables sont accessibles. Après suppression des ε-productions, des renommages et quelques substitutions :

$N = \{S, X_{0,2}, X_{0,3}, X_{3,2}, X_{3,3}, Y_{0,2}, Y_{0,3}\},\ T = \{1, 2, +, =\},\ S$

$$P\left\{\begin{array}{l}
S \rightarrow\ 1Y_{0,3} \mid 2Y_{0,2} \mid 2Y_{0,3}X_{3,3}\\
Y_{0,2} \rightarrow\ +X_{0,2} \mid\ = 2\\
Y_{0,3} \rightarrow\ +X_{0,3} \mid\ = 1\\
X_{0,2} \rightarrow\ 1Y_{0,3}X_{3,2} \mid 2Y_{0,2}X_{3,2} \mid 2Y_{0,3}X_{3,3}X_{3,2}\\
X_{0,3} \rightarrow\ 1Y_{0,2} \mid 1Y_{0,3}X_{3,3} \mid 2Y_{0,2}X_{3,3} \mid 2Y_{0,3}X_{3,2} \mid 2Y_{0,3}X_{3,3}X_{3,3}\\
X_{3,2} \rightarrow\ +2\\
X_{3,3} \rightarrow\ +1
\end{array}\right.$$

Après le renommage $A = Y_{0,2}$, $B = Y_{0,3}$, $C = X_{0,2}$, $D = X_{0,3}$, $E = X_{3,2}$, $F = X_{3,3}$ nous obtenons :

$N = \{S, A, B, C, D, E, F\},\ T = \{1, 2, +, =\},\ S$

$$P\left\{\begin{array}{ll}
S \rightarrow\ 1B \mid 2A \mid 2BF & A \rightarrow\ +C \mid\ = 2\\
B \rightarrow\ +D \mid\ = 1 & C \rightarrow\ 1BE \mid 2AE \mid 2BFE\\
D \rightarrow\ 1A \mid 1BF \mid 2AF \mid 2BFF \mid 2BE & E \rightarrow\ +2\\
F \rightarrow\ +1 &
\end{array}\right.$$

On peut remarquer que cela se simplifie en

$N = \{S, A, B, C, D\},\ T = \{1, 2, +, =\},\ S$

$$P\left\{\begin{array}{ll}
S \rightarrow\ 1B \mid 2A \mid 2B + 1 & A \rightarrow\ +C \mid\ = 2\\
B \rightarrow\ +D \mid\ = 1 & C \rightarrow\ S + 2\\
D \rightarrow\ 1A \mid S + 1 \mid 2B + 2 &
\end{array}\right.$$

Et en simplifiant encore

$N = \{S, D\},\ T = \{1, 2, +, =\},\ S$

$$P\left\{\begin{array}{l}
S \rightarrow\ 1 = 1 \mid 2 = 2 \mid 2 = 1 + 1 \mid 2 + S + 2 \mid 1 + D \mid 2 + D + 1\\
D \rightarrow\ S + 1 \mid 1 + S + 2 \mid 1 = 2 \mid 2 + D + 2 \mid 2 = 1 + 2
\end{array}\right.$$

Il serait intéressant de voir si elle est équivalente à celle du TD 11, mais on ne peut décider si deux grammaires engendrent le même langage. En effet nous ne disposons pas de mécanisme pour vérifier l'équivalence de deux grammaires.