

# Opérations, dénombrement

Feuille de travaux dirigés n°1

6-10 février 2006

1. On appelle *facteur* d'un mot  $u \in \Sigma^*$  l'ensemble des mots  $w \in \Sigma^*$  tels que  $u = xwy$  pour  $x$  et  $y$ , deux mots sur  $\Sigma$ . Quel est le nombre minimum/maximum de facteurs d'un mot de longueur 7 sur un alphabet de 3 lettres ?

2. Soient les langages  $L_1 = \{1\}$  et  $L_0 = \{0\}$

a) Que représentent les langages :

$$L_1^*, L_0^*, L_1^+, L_0^+ ?$$

b) Les égalités suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

$$L_1^+.(L_1^* \cup L_0^*) = (L_1^+.L_1^*) \cup (L_1^+.L_0^*)$$

$$L_1^+.(L_1^+ \cap L_0^*) = (L_1^+.L_1^+) \cap (L_1^+.L_0^*)$$

c) Plus généralement, pour deux langages  $L$  et  $M$  est-ce vrai que

$$L^+.(L^* \cup M^*) = (L^+.L^*) \cup (L^+.M^*)$$

$$L^+.(L^+ \cap M^*) = (L^+.L^+) \cap (L^+.M^*)$$

3. Combien y a-t-il de mots de longueur  $p$

a) sur un alphabet à  $n$  lettres ?

b) contenant au moins une occurrence d'une lettre donnée  $a$  ?

c) contenant exactement une occurrence d'une lettre donnée  $a$  ?

d) contenant exactement  $q$  occurrences d'une lettre donnée  $a$  ?

e) sur un alphabet de 3 lettres où chaque lettre apparaît au moins une fois ?

4. Montrer que  $\Sigma^*$  est un ensemble infini dénombrable.

5.  $L$  étant un langage quelconque,  $L^*$  est-il toujours un langage infini ?

6. Avec  $L = \{00, 01, 10, 11\}$ , montrer que  $L^*$  est l'ensemble des mots de longueur paire. Peut-on trouver un langage  $X$  tel que  $X^*$  soit l'ensemble des mots de longueur impaire ?

*Devoir à rendre pour le prochain TD*

**Devoir 1.** Combien y a-t-il de mots de longueur  $p$  sur un alphabet de 5 lettres où chaque lettre apparaît au moins une fois.