SI 1re année — **Année 2005-2006**
Informatique théorique — **Langages Formels et Automates**

Automates finis et expressions rationnelles

Corrigé partiel de la feuille de travaux dirigés n^{o}3

13 mars 2006

1.

Le tableau des $r_{i,j}^k$ se présente ainsi :

k	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$r_{1,1}^k$	ε			
$r_{1,2}^k$	0	0	$0(00)^\star$	$0(00)^\star + 0^\star 1((0+1)0^\star 1)^\star (0+1)(00)^\star$
$r_{1,3}^k$	1	1	$0^\star 1$	$0^\star 1((0+1)0^\star 1)^\star$
$r_{2,1}^k$	0			
$r_{2,2}^k$	ε	$\varepsilon + 00$		
$r_{2,3}^k$	1	$1 + 01$		
$r_{3,1}^k$	$\varnothing$			
$r_{3,2}^k$	Σ	Σ	$(0+1)(00)^\star$	
$r_{3,3}^k$	ε	ε	$\varepsilon + (0+1)0^\star 1$	

Ce qui permet de conclure que l'expression rationnelle cherchée est :

$$L(A) = r_{12}^3 + r_{13}^3 = 0(00)^\star + 0^\star 1((0+1)0^\star 1)^\star (0+1)(00)^\star + 0^\star 1((0+1)0^\star 1)^\star$$

2.

b) Le système d'équations de droite associé à l'automate est :

$$\begin{cases} Y_0 = 1Y_0 + 0Y_1 \\ Y_1 = \varepsilon + 0Y_2 + 1Y_3 \\ Y_2 = \varepsilon + 0Y_1 + 1Y_2 \\ Y_3 = 0Y_1 + 1Y_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_3 = 1^\star 0Y_1 \\ Y_0 = 1Y_0 + 0Y_1 \\ Y_1 = \varepsilon + 0Y_2 + 1^+ 0Y_1 \\ Y_2 = \varepsilon + 0Y_1 + 1Y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_2 = 1^\star(\varepsilon + 0Y_1) \\ Y_0 = 1^\star 0Y_1 \\ Y_1 = \varepsilon + 01^\star + 01^\star 0Y_1 + 1^+ 0Y_1 = (\varepsilon + 01^\star) + (01^\star 0 + 1^+ 0)Y_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1 = (01^\star 0 + 1^+ 0)^\star(\varepsilon + 01^\star) \\ Y_0 = 1^\star 0Y_1 \end{cases}$$

D'où

$$L(B) = 1^\star 0(01^\star 0 + 1^+ 0)^\star(\varepsilon + 01^\star)$$

Par hasard on vient d'obtenir le même résultat que dans l'autre version !

c) Le système d'équations de gauche associé à l'automate est :

$$\begin{cases} Z_0 = \varepsilon + Z_0 1 = 1^\star \\ Z_1 = Z_0 0 + Z_3 0 + Z_2 0 = 1^\star 0 + (Z_2 + Z_3)0 \\ Z_2 = Z_1 0 + Z_2 1 = Z_1 01^\star \\ Z_3 = Z_1 1 + Z_3 1 = Z_1 11^\star \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_1 = 1^\star 0 + (Z_1 01^\star + Z_1 11^\star)0 = 1^\star 0 + Z_1(01^\star 0 + 1^+ 0) \\ Z_2 = Z_1 01^\star \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_1 = 1^\star 0(01^\star 0 + 1^+ 0)^\star \\ Z_2 = 1^\star 0(01^\star 0 + 1^+ 0)^\star 01^\star \end{cases}$$

D'où

$$L(B) = \left(1^\star 0(01^\star 0 + 1^+ 0)^\star\right)(01^\star + \varepsilon)$$

3. On obtient le système suivant

$$\begin{cases} Z_1 = \varepsilon + Z_2 a + Z_3 b \\ Z_2 = Z_1 a + Z_4 b \\ Z_3 = Z_1 b + Z_4 a \\ Z_4 = Z_2 b + Z_3 a \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_1 = \varepsilon + Z_1 aa + Z_4 ba + Z_1 bb + Z_4 ab = \varepsilon + Z_1(aa + bb) + Z_4(ab + ba) \\ Z_4 = Z_1 ab + Z_4 bb + Z_1 ba + Z_4 aa = Z_1(ab + ba) + Z_4(aa + bb) \end{cases}$$

$$\left\{ Z_4 = Z_1(ab + ba)(aa + bb)^\star \right.$$

$$\left\{ Z_1 = \varepsilon + Z_1((aa + bb) + (ab + ba)(aa + bb)^\star(ab + ba)) \right.$$

$$\left\{ Z_1 = ((aa + bb) + (ab + ba)(aa + bb)^\star(ab + ba))^\star \right.$$

Un système d'équations de droite permettait d'obtenir la même chose :

$$\begin{cases} Y_1 = \varepsilon + aY_2 + bY_3 \\ Y_2 = aY_1 + bY_4 \\ Y_3 = bY_1 + aY_4 \\ Y_4 = bY_2 + aY_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1 = \varepsilon + aaY_1 + abY_4 + bbY_1 + baY_4 = \varepsilon + (aa + bb)Y_1 + (ab + ba)Y_4 \\ Y_4 = baY_1 + bbY_4 + abY_1 + aaY_4 = (aa + bb)Y_4 + (ab + ba)Y_1 \end{cases}$$

$$\left\{ Y_4 = (aa + bb)^\star(ab + ba)Y_1 \right.$$

$$\begin{cases} Y_1 = \varepsilon + (aa + bb)Y_1 + (ab + ba)(aa + bb)^\star(ab + ba)Y_1 \\ = \varepsilon + ((aa + bb) + (ab + ba)(aa + bb)^\star(ab + ba))Y_1 \end{cases}$$

$$\left\{ Y_1 = ((aa + bb) + (ab + ba)(aa + bb)^\star(ab + ba))^\star \right.$$