

Automate minimal par quotients

Corrigé partiel de la feuille de travaux dirigés n°4

20 mars 2006

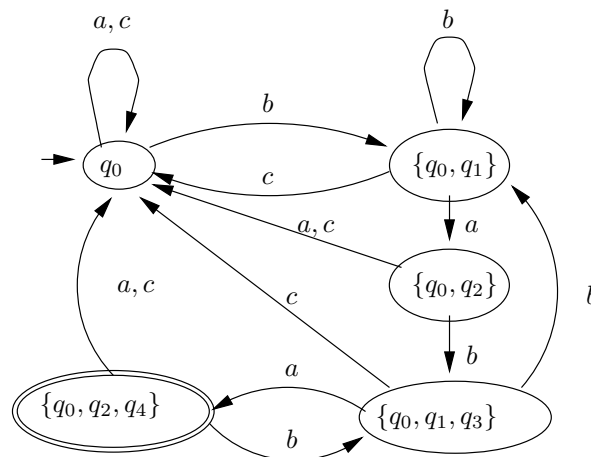
1.

a) Un automate non déterministe pour reconnaître L est

	a	b	c
$\rightarrow q_0$	q_0	$\{q_0, q_1\}$	q_0
q_1	q_2		
q_2		q_3	
q_3	q_4		
$\leftarrow q_4$			

b) La détermination de cet automate est donnée ci-dessous :

	a	b	c
$\rightarrow q_0$	q_0	$\{q_0, q_1\}$	q_0
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	q_0
$\{q_0, q_2\}$	q_0	$\{q_0, q_1, q_3\}$	q_0
$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_2, q_4\}$	$\{q_0, q_1\}$	q_0
$\leftarrow \{q_0, q_2, q_4\}$	q_0	$\{q_0, q_1, q_3\}$	q_0



c) Calcul de quotients gauches de $L = (a + b + c)^*baba$:

$$a^{-1}L = L$$

$$b^{-1}L = L + aba = M$$

$$c^{-1}L = L$$

On continue sur M :

$$a^{-1}(L + aba) = a^{-1}L + ba = L + ba = N$$

$$b^{-1}(L + aba) = b^{-1}L + \emptyset = M$$

$$c^{-1}(L + aba) = c^{-1}L + \emptyset = L$$

On continue sur N :

$$a^{-1}(L + ba) = a^{-1}L + \emptyset = L$$

$$b^{-1}(L + ba) = b^{-1}L + a = L + aba + a = O$$

$$c^{-1}(L + ba) = c^{-1}L + \emptyset = L$$

On continue sur O :

$$a^{-1}(L + aba + a) = a^{-1}L + ba + \varepsilon = L + ba + \varepsilon = P$$

$$b^{-1}(L + aba + a) = b^{-1}L + \emptyset + \emptyset = M$$

$$c^{-1}(L + aba + a) = c^{-1}L + \emptyset + \emptyset = L$$

On termine par le calcul sur P :

$$a^{-1}(L + ba + \varepsilon) = L + \emptyset + \emptyset = L$$

$$b^{-1}(L + ba + \varepsilon) = b^{-1}L + a + \emptyset = O$$

$$c^{-1}(L + ba + \varepsilon) = L + \emptyset + \emptyset = L$$

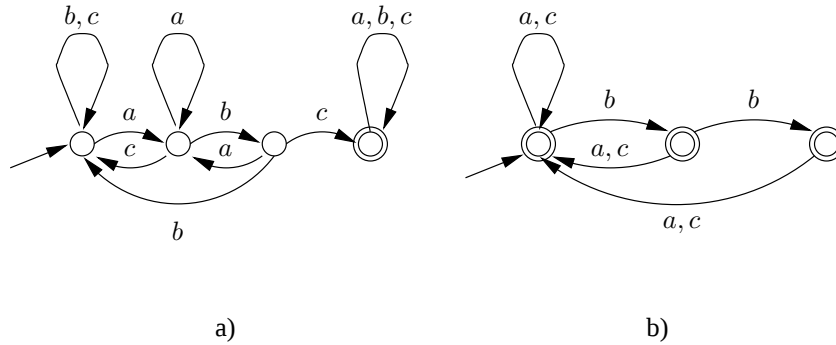
d) qui nous donne l'automate fini déterministe minimal suivant :

		a	b	c
$\rightarrow$	L	L	M	L
	M	N	M	L
	N	L	O	L
	O	P	M	L
$\leftarrow$	P	L	O	L

qui est celui que nous avons précédemment obtenu, à une renumérotation des états près.

2.

a) L est reconnu par l'automate a) et L' par b)



b) Calcul de quotients gauches de $L' = ((\varepsilon + b + bb)(a + c)^+)^*(\varepsilon + b + bb)$:

Nous pouvons remarquer que le rôle des lettres a et c est identique, ce qui nous permet d'utiliser à leur place une lettre *générique* d . Ainsi nous avons $L' = ((\varepsilon + b + bb)d^+)^*(\varepsilon + b + bb)$.

Notons $T = \varepsilon + b + bb$, ainsi on a $L' = (Td^+)^*T$.

Nous pouvons préciser déjà, que

$$d^{-1}T = \emptyset$$

$$b^{-1}T = \varepsilon + b = T'$$

On commence avec L'

$$d^{-1}L' = (d^{-1}(Td^+))(Td^+)^*T + d^{-1}T = (d^{-1}d^+)(Td^+)^*T = d^*(Td^+)^*T = d^*L' = L'$$

$$b^{-1}L' = (b^{-1}(Td^+))(Td^+)^*T + b^{-1}T = (b^{-1}T)d^+L' + (b^{-1}d^+)(Td^+)^*T + T' = T'd^+L' + T' = L''$$

On continue sur L'' :

$$d^{-1}L'' = (d^{-1}T')d^+L' + d^{-1}d^+L' + d^{-1}T' = (d^{-1}d)d^+L' = d^*L' = L'$$

$$b^{-1}L'' = (b^{-1}T')d^+L' + b^{-1}d^+L' + b^{-1}T' = d^+L' + \varepsilon = L'''$$

On continue sur L''' :

$$d^{-1}L''' = d^{-1}d^+L' = d^*L' = L'$$

$$b^{-1}L''' = b^{-1}d^+L' = \emptyset$$

On termine par le calcul sur $\emptyset$:

$$d^{-1}\emptyset = \emptyset$$

$$b^{-1}\emptyset = \emptyset$$

Ce qui nous permet de retrouver l'automate donné précédemment.

Remarque : la partie *délicate* de ce calcul est l'égalité $d^*L' = L'$ que l'on démontre par double inclusion :

– $d^*L' \subset L'$

$$d^*(Td^+)^*T = (Td^+)^*T \cup d^+(Td^+)^*T \subset L' \cup Td^+(Td^+)^*T = L' \cup (Td^+)^+T \subset L' \cup L' = L'$$

– $L' \subset d^*L'$ est évident, car $\varepsilon \in d^*$.

c) Un automate non-déterministe pour reconnaître $L \cup L'$ est l'automate obtenu à partir des deux automates précédents où on ajoute un nouvel état initial et des ε -transitions vers les états initiaux.

d) Par des états produits.