INDUCTION

1. Montrez que LBP=LP

Montrons d'abord que LP$\subset$ LBP par induction structurelle
Base P(ε) est vrai, puisque le mot vide est dans LBP
Propagation :
Montrons que P(u) et P(v) entraînent P((u)v).
Un préfixe de (u)v est soit

- Le mot vide
- (p_u ou p_u est un préfixe de u
- (u) p_v où p_v est un préfixe de v

Dans tous les cas, ce préfixe comporte au moins autant d'ouvrantes que de fermantes.
De plus (u)v contient exactement autant d'ouvrantes que de fermantes.
Donc (u)v est bien dans LBP.

Pour démontrer la réciproque on introduit la fonction suivante
Soit altitude(m,i)= le nombre de (- le nombre de) dans les i premières lettres de m,
P(m)$\Leftrightarrow$ $\forall$i 0 $\leq$i$\leq$lg(m) altitude (m,i) $\geq$0 et altitude (m, lg(m))=0

Proposition 1
Pour tout mot m de {(,)}*, $\forall$i 1 $\leq$i$\leq$lg(m)+1 altitude((m,i)= altitude(m,i-1) +1

Proposition 2
Pour tous les mots m, m' de {(,)}*,
altitude(mm',i)= altitude(m,i) $\forall$i 0 $\leq$i$\leq$lg(m)
altitude(mm',i)= altitude(m,lg(m))+altitude (m', i-lg(m)) $\forall$i lg(m)+1 $\leq$i$\leq$lg(m)+lg(m')

Montrons par récurrence sur n la propriété
H(n): tout mot m de longueur n vérifiant P(m) est dans LP

H(0) est vrai car ε est le seul mot de longueur 0 et il appartient à LP
Supposons H(p) vrai pour tout p<n
Soit m un mot vérifiant P(m) et de longueur n
m=$m_1m_2\ldots m_n$

Soit k le plus petit entier tel que altitude(m, k)=0 (il existe car altitude (m, lg(m))=0)
On a nécessairement altitude(m,k-1)=1 donc m_k=)
Posons u=$m_2..m_{k-1}$, et v=$m_{k+1}..m_n$
On a m=(u)v.
D'après la proposition 2 , on a altitude((u)v,i)= altitude((u,i) $\forall$i 0 $\leq$i$\leq$lg(u)+1
D'après la proposition 1, on a altitude((u,i)= altitude(u,i-1) +1 $\forall$i 1 $\leq$i$\leq$lg(u)+1

Donc $\forall i\ 1 \leq i \leq lg(u)$ altitude (u,i) = altitude((u,i+1) -1= altitude (m, i) >1 puisque i <k, et altitude (u, lg(u))= altitude (m, k-1)-1=1
Le mot u appartient donc à LBP
D'après la proposition 2, altitude(v,i)= altitude(m, i+lg((u))) $\forall i \leq 1 \leq i \leq lg(v)$.
On a donc altitude(v,i)$\geq$0, $\forall i \leq 1 \leq i \leq lg(v)$et altitude (v, lg(v))=0
Le mot v appartient donc à LBP

Les deux mots u et v sont de longueur strictement inférieure à n, donc par hypothèse ils sont dans LP. Par définition de LP, m est donc aussi dans LP

2. *Montrez que le schéma définissant LP est libre*

Clairement un mot ne peut pas être à la fois dans la base et construit par les règles.
Supposons qu'il existe m=(u)v=(u')v', avec u,v,u',v' dans LP.
Avec la même fonction altitude que pour l'exercice précédent, on a
altitude ((u), lg(u)+2)= 0=altitude ((u'), lg(u')+2)
Supposons que u et u' soient différents, alors ils sont forcement de longueur différente.
On peut donc supposer que lg(u)<lg(u'). Alors u) est un préfixe de u' puisque (u)v=(u')v', mais u) contient plus de) que de (, en contradiction avec u' dans LP.
Donc u=u', et donc v=v'.

3. *Montrez que LP = LP2. Le schéma définissant LP2 est il libre ?*

1) LP et LP2 sont identiques

Montrons tout d'abord que LP est inclus dans LP2, par induction structurelle sur LP

Tout mot de la base de LP est dans LP2, car les deux ensembles ont la même base.

Supposons que les mots u et v de LP soient aussi dans LP2, alors par définition de LP2, le mot (u) est dans LP2 (Règle 2) et puisque (u) et v sont dans LP2, (u)v est dams LP2 (Règle 1), donc si u et v sont dans LP2, (u)v est dans LP2.

On vient de prouver que tous les mots de LP ont la propriété d'« appartenir à LP2 » par induction structurelle sur LP2

Es
Montrons maintenant que LP2 est inclus dans LBP

A nouveau, faisons une induction structurelle sur LP2 cette fois.

Tout mot de la base de LP2 est dans LBP

Si un mot u de LP2 est dans LBP il en est de même de (u).

Soient maintenant u et v mots de LP2 , supposons qu'ils sont dans LBP, il en est alors de même pour uv est lui aussi dans LP

2) Ce schéma n'est pas libre : par exemple le mot ()()() peut être produit à partir de la première règle avec u=() et v=()() ou bien avec u=()() et v=()