1. *Définir inductivement la fonction*

*ω : A*x A---->N, w(m,c)= $|m|_c$*

Base $\forall c \in A, \omega(\varepsilon,c) = 0$
Règles $\forall x \in A^*, \ \forall a \neq c, a \in A, \omega(ax,c) = \omega(x,c)$
$\forall x \in A^*, \omega(cx,c) = \omega(x,c) + 1$

2. *Donnez et prouvez une définition inductive pour l'ensemble des mots binaires représentés sans zéro inutiles en tête EcrituresBin*

Base : 0,1 sont dans EcrituresBin
Règles : si m≠0 appartient à EcrituresBin, alors m0 et m1 sont dans EcrituresBin

3. *Définir inductivement la fonction*

val : EcrituresBin---->N,

val(m)= entier représenté par m

Base val(0)=0, val(1)=1
Règles Si m≠0 val(m0)=2*val(m)
et val(m1)=2*val(m)+1

4. *Définir inductivement la fonction*

Σ: EcrituresBin x *EcrituresBin ----> EcrituresBin*
Σ(x,y) est le mot binaire qui représente l''entier val(x)+val(y)

Pour définir la fonction Σ , on a besoin d'une définition inductive libre de EcrituresBin x EcrituresBin

Base (0,0),(0,1),(1,0),(1,1) sont dans EcrituresBin x EcrituresBin
Constructeurs :
Si a et b $\in$ {0,1}, m'≠0 (a,m') $\in$ EcrituresBin x EcrituresBin
$\Rightarrow$(a, m'b) $\in$ EcrituresBin
Si a et b $\in$ {0,1}, m≠0 (m,b') $\in$ EcrituresBin x EcrituresBin
$\Rightarrow$(ma, m') $\in$ EcrituresBin

Si a et b $\in$ {0,1}, m≠0, m'≠0 (m,m') $\in$ EcrituresBin x EcrituresBin

$\Rightarrow$(ma, m'b) $\in$ EcrituresBin

On vérifie que ce schéma définit bien des couples d'écritures binaires (aucun des mots produits n'a de zéro inutile en tête). Tous les couples sont produit par ce schema. Iil est libre, on peut donc l'utiliser pour définir la fonction Σ.

Base Σ(0,0)=0,
Σ(1,0)=1;
Σ(0,1)=1;
Σ(1,1)=10;

Règles Σ(u0,v0)=Σ(u,v)0
Σ(u0,v1)=Σ(u,v)1
Σ(u0,0)=u0
Σ(u0,1)=u1
Σ(u1,0)=u1
Σ(u1,1)= Σ(u,1)0
Σ(0,v0)=v0
Σ(0,v1)=v1
Σ(1,v0)=v1
Σ(1,v1)=Σ(1,v)0
Σ(u0,v0)= Σ(u,v)0
Σ(u0,v1)= Σ(u,v)1
Σ(u1,v0)= Σ(u,v)1
Σ(u1,v1)=Σ(u,Σ(v,1))0

5. *Définir inductivement les fonctions longueur d'une liste concaténation de deux listes, ajout_en_fin d'un élément à une liste et miroir d'une liste. Définir une fonction inductive qui teste si un élément appartient à une liste*

longueur(liste_vide)=0
longueur(cons(a,l))=longueur(l)+1

concat(liste_vide,l)=l
concat(cons(a,l'),l)=cons(a,concat(l',l))

ajout_en_fin(liste_vide,e)= cons(e, liste_vide)
ajout_en_fin(cons(a,l),e)=cons(a,ajout_en_fin(l,e)

miroir(liste_vide)=liste_vide
miroir(cons(a,l))=ajout_en_fin(miroir(l),a))

6. *On suppose que les éléments de la liste sont des entiers. Ecrire une fonction inductive qui a une liste associe*

la somme de ses éléments
la sous liste de ses éléments pairs
la liste où tous les éléments ont été augmentés de un

somme(liste_vide)=0
somme(cons(a,l))=somme(l)+a

paire(liste_vide)=liste_vide
paire(cons(a,l))= paire (l) si a est impair et cons(a, paire(l)) si a est pair
add_un(liste_vide)=liste_vide
add_un(cons(a,l))=cons (a+1, add_un(l))

7. *Définir inductivement la fonction appartient qui teste si un élément appartient à un sous –ensemble*

Appartient (e, ensemble_vide) = faux
Appartient (e, ins(f,F))= Apppartient (e,F) ou e=f

8. *Définir inductivement les fonctions cardinal d'un sous ensemble, union de deux sous ensembles et intersection des deux sous ensembles. Donner aussi un code récursif*

Cardinal (ensemble_vide) = O
Cardinal (ins (e,F)) = Cardinal(F) si e Appartient (e,F), Cardinal(F)+1 sinon

Union (ensemble_vide, E) = E
Union (ins(e,F),E) =ins(e, Union(F,E))

Intersection(ensemble_vide, E) = ensemble_vide
Intersection (ins(e,F),E) = Interersection (F,E) si Appartient(e,E)=false
= ins(e, Intersection (F,E)) sinon

9. *Combien y a-t-il d'arbres binaires ayant 5 noeuds?Un arbre binaire est saturé si tout noeud à 0 ou 2 fils. Donnez une définition inductive des arbres binaires saturés.Combien y a-t-il d'arbres binaires saturés ayant 5 noeuds?*

Dans cette solution, on considère des arbres binaires déssinés, c'est-à-dire que les deux sous arbres T1 et T2 ne sont pas interchangeables.
Il y a un seul arbre binaire ayant un sommet
Il y en a deux avec deux sommets
Il y en a 5 avec trois sommets
Avec 4 sommets, il y en

- 1x5 ayant 0 sommets dans le sous arbre gauche, et trois a droite
- 1x2 ayant un sommet dans le sous arbre gauche et deux à droite
- 2x1ayant deux sommets dans le sous arbre gauche et un à droite
- 5x1 ayant trois sommets à gauche et zéro à droite.

Il y en a donc en tout 14

Avec 5 sommets, il y en

- 1x14 ayant 0 sommets dans le sous arbre gauche, et 4 a droite
- 1x5 ayant 1 sommet dans le sous arbre gauche et 3 à droite
- 2x2 ayant 2 sommets dans le sous arbre gauche et 2 à droite
- 5x1 ayant 3 sommets à gauche et 1 à droite
- 14x1 ayant 4 sommets à gauche et 0 à droite

Il y en a donc en tout 42

10. *On définit l'ordre d'un arbre comme étant son nombre de sommets, la taille d'un arbre comme étant son nombre d'arêtes.*

Donner une définition inductive de ces 2 fonctions

Prouver que si T est un arbre non vide, alors taille(T) = ordre(T)-1

Ordre (arbre_vide)=0, ordre ((e,T1,T2))=ordre(T1)+ordre(T2)+1
Taille (arbre_vide)=-1, taille ((e,T1,T2))= taille (T1)+taille (T2)

Pour l'arbre vide, on a bien taille(arbre_vide) = ordre (arbre_vide)-1

On suppose la relation vérifiée pour T1 et T2,
On a alors
Ordre ((e,T1,T2))=1+Ordre(T1)+Ordre(T2)=Taille(T1)+Taille(T2)-1=Taille ((e,T1,T2))-1