INDUCTION

1. Précisez en quoi chacun des axiomes de Peano est "utile"

Pour chacun des 5 axiomes, on va donner un exemple d'ensemble différent de IN vérifiant les 4 autres axiomes.

Pour l'axiome 1 : l'ensemble vide vérifie les 4 autres axiomes.
Pour l'axiome 2 : l'ensemble {0} où 0 n'a pas de successeur vérifie les 4 autres axiomes.
Pour l'axiome 3 : l'ensemble {0} où 0 est le successeur de 0 vérifie les 4 autres axiomes.
Pour l'axiome 4 : l'ensemble {0,1} où 1 est le successeur de 0 et le successeur de 1 vérifie les 4 autres axiomes.
Pour l'axiome 5 : l'ensemble des réels positifs où pour tout x, x+1 est le successeur de x vérifie les 4 autres axiomes.

2. Montrez par récurrence que pour tout entier n, la somme des n premiers entiers non nuls est égale à n(n+1)/2

Base :
On commence par montrer que le résultat est vrai pour 0 : en effet la somme de zéro entiers vaut 0.
Hypothèse de récurrence
On suppose que le résultat est vrai à l'ordre n.
Montrons que le résultat est vrai à l'ordre n+1
La somme des n+1 premiers entiers non nuls, est égale à n+1 plus la somme des n premiers entiers non nuls qui par hypothèse d'induction est égale à n(n+1)/2. Donc la somme des n+1 premiers entiers non nuls est bien n+1(n+2)/2.

3. Montrez par récurrence que la somme des cubes des n premiers entiers non nuls est égal au carré de la somme de ces entiers

Base : On commence par montrer que le résultat est vrai pour n=0. En effet, la somme de zéros cube vaut 0.
Hypothèse de récurrence
On suppose que le résultat est vrai à l'ordre n.
Montrons que le résultat est vrai à l'ordre n+1
La somme des cubes des n+1 premiers entiers non nuls, est égale à $(n+1)^3$ plus la somme des cubes des n premiers entiers non nuls qui par hypothèse d'induction est égale à $(n(n+1)/2)^2$. Donc la somme des cubes des n+1 premiers entiers non nuls est bien $(n+1(n+2)/2)^2$.

4. Modifiez la forme du raisonnement par récurrence pour prouver inductivement qu'une propriété est vraie pour les entiers pairs, puis pour les entiers relatifs

Pour les entiers pairs, il suffit de montrer P(0) et P(n), n pair, entraîne P(n+2)

Pour les entiers relatifs, il suffit de montrer P(0) et P(n) entraîne P(n+1) et P(n-1)

5. Trouver l'erreur dans la démonstration suivante de la propriété suivante : pour tout n entier,, si un paquet de n pièces contient une pièce de un euro, alors ce paquet ne contient que des pièces de un euro.

Base : Cette propriété est bien sûr vraie pour n=1.

Induction : Supposons donc que la propriété est vraie pour tout paquet de n pièces.
On va montrer qu'alors elle est vraie pour tout paquet de n+1 pièces.
Soit donc un paquet de n+1 pièces contenant une pièce de 1€. Retirons l'une des pièces qui ne soit pas cette pièce, on a un paquet de n pièces. Ce paquet contient une pièce de 1€. Par hypothèse de récurrence, ce paquet ne contient donc que des pièces de 1€. Rajoutons la pièce qu'on avait enlevée : si c'est 1€, on a terminé. Sinon, enlevons du paquet une des n autres pièces. On obtient alors un nouveau paquet de n pièces contenant au moins 1€, et par hypothèse de récurrence il ne contient que des pièces de 1€.

On a donc prouvé qu'il n'y a que des pièces de 1€ ???

L'étape inductive n'est pas vraie pour n=1. Dans ce cas en effet, lorsqu'on considère un paquet de n+1=2 pièces contenant une pièce P de 1€, il n'y a qu'une autre pièce P'. Lorsque l'on retire une pièce différente de P, c'est à dire l'autre pièce P', on obtient un paquet de une pièce (la pièce P) qui est bien une pièce de un euro. Si P' est une pièce de 1€, on a terminé. Sinon, enlever du paquet une des n autres pièces, c'est enlever P, le nouveau paquet de n pièces ne contient aucune pièce de 1 € et l'on ne peut pas appliquer l'hypothèse de récurrence.

6. *Nous allons démontrer que lorsque n pièces de monnaies, avec n supérieur à 2, d'apparence identique sont données, avec une plus légère que les autres, alors il suffit d'une pesée sur une balance à 2 plateaux pour identifier la plus légère.*

Lorsque n=2, c'est facile ! On place une pièce sur chaque plateau de la balance, l'équilibre ne se fait pas car par hypothèse une des pièces est plus légère, et cette pesée permet de la déterminer.

On suppose maintenant que l'on connaît une procédure utilisant une pesée pour n pièces, et montrons comment en obtenir une pour n+1 pièces. Donnons-nous (n+1) pièces dont l'une est plus légère que les autres (qui, elles, ont toutes un poids identique). Nous mettons à part l'une des pièces, et appliquons la procédure donnée par l'hypothèse de récurrence pour les n pièces restantes. Si cette procédure fonctionne, on connaît la pièce la plus légère, sinon, c'est celle qu'on a mis à part qui est la plus légère.

En fait si la procédure fonctionne, tout ce que l'on peut supposer c'est qu'elle est capable lorsqu'on lui donne n pièces parmi lesquelles une est plus légère que les autres, de déterminer cette pièce, mais on a aucune idée de ce qu'elle fait si on lui donne n pièce toutes identiques.

7. *Justification de la récurrence forte*

Première démonstration

Supposons qu'il existe une propriété P qui soit vraie pour 0, qui si elle est vraie pour tout entier m <n est aussi vraie pour n et qui cependant n'est pas vraie pour tous les entiers. Soit F l'ensemble des entiers pour lesquels cette propriété est fausse. F est non vide par hypothèse, donc F étant un sous ensemble non vide de N possède un plus petit élément, soit n_0 celui ci. La propriété P est vraie pour tous les entiers strictement plus petits que n_0, par définition du plus petit élément de F. Elle est donc vraie pour n_0 , une contradiction.

Seconde démonstration
Soit Q(n) la propriété : Pour tout m<n P(n) est vrai.
Alors une récurrence forte sur P est équivalente à une récurrence simple sur Q

8. *Montrer que tout nombre entier positif est le produit de (un ou plusieurs) nombres premiers.*

Preuve par récurrence forte
Base : c'est vrai pour n=2, puisque 2 est lui-même premier.
Induction : Supposons que tout entier strictement inférieur à n soit le produit de un ou plusieurs nombres premiers.
Montrons que n est le produit de un ou plusieurs entiers premiers.
Si n est premier, n lui même est le produit d'un nombre premier.
Sinon, n admet un diviseur d, différent de 1 et de n. On a donc n=dp, où d et p sont deux entiers strictement inférieurs à n. Chacun d'eux est donc le produit d'un ou plusieurs nombres premiers, et n est donc lui-même le produit de plusieurs nombres premiers.

9. *Donnez un exemple d'ordre total et un exemple d'ordre partiel.*

Il y en a plusieurs dans le cours, la relation « inférieur ou égal » sur les entiers ou les réels est un ordre total (lorsque l'on compare deux entiers, il y en a toujours un qui est inférieur ou égal à l'autre), en revanche la relation d'inclusion pour les parties d'un ensemble est un ordre partiel (si l'on regarde les deux ensembles $\{1\}$ et $\{2\}$, aucun n'est inclus dans l'autre).

10. *Montrer que la relation* être préfixe *est une relation d'ordre.*

La relation est réflexive, un mot est préfixe de lui-même. Elle est antisymétrique, c'est-à-dire que si u est préfixe de v et que v est préfixe de u, alors nécessairement les deux mots sont de même longueur, et ont toutes leurs lettres identiques, ils sont donc égaux. La relation est aussi transitive, si u est préfixe de v, et v préfixe de w, alors u est préfixe de w.
Ce n'est pas un ordre total, par exemple deux mots chacun composé d'une seule lettre ne sont pas préfixe l'un de l'autre s'ils sont différents.

11. Définir formellement l'ordre lexicographique. Montrez qu'il s'agit bien d'un ordre et dites s'il est partiel ou total

On suppose que l'alphabet est muni d'une relation d'ordre total $\leq$.
Soient $u=u_1u_2\ldots u_n$ et $v=v_1v_2\ldots v_m$ deux mots sur A, on définit la relation infLex par u infLex v si et seulement si
u est un préfixe de v
ou il existe k, $0 \leq k<\inf(n,m)$ tel que pour tout $i \leq k$ $u_i=v_i$ et $u_{k+1} \leq v_{k+1}$ et $u_{k+1} \neq v_{k+1.}$

Il s'agit bien d'un ordre, en effet
- infLex est réflexive, car u infLex u puisque u est préfixe de u.
- infLex est antisymétrique, en effet supposons u infLex v et v infLex u

Cas 1 u est préfixe de v, on a alors deux sous cas :
Cas 1.1 v est préfixe de u, on a alors u=v
Cas 1.2 il existe k, $0 \leq k<\inf(\text{longueur}(u),\text{longueur}(v))$ tel que pour tout $i \leq k$ $u_i=v_i$ et $v_{k+1} \leq v_{k+1}$ et $u_{k+1} \neq v_{k+1.}$, mais ceci est incompatible de v préfixe de u

Cas 2 il existe k, $0 \leq k<\inf(n,m)$ tel que pour tout $i \leq k$ $u_i=v_i$ et $u_{k+1} \leq v_{k+1}$ et $u_{k+1} \neq v_{k+1.}$
Cas 2.1 v est préfixe de u : mais ceci est incompatible
Cas 2.2 il existe k, $0 \leq k<\inf(\text{longueur}(u),\text{longueur}(v))$ tel que pour tout $i \leq k$ $u_i=v_i$ et $u_{k+1} \leq v_{k+1}$ et $u_{k+1} \neq v_{k+1.}$ mais ceci est incompatible
Donc nécessairement on a u=v et la relation est bien antisymétrique
- infLex est transitive

Supposons u infLex v et v infLex w
Cas 1 u est préfixe de v
Cas 1.1 v est préfixe de w, dans ce cas, u est préfixe de w et donc infLex w
Cas 1.2 il existe k, $0 \leq k<\inf(\text{longueur}(v), \text{longueur}(w))$ tel que pour tout $i \leq k$ $w_i=v_i$ et $v_{k+1} \leq w_{k+1}$ et $w_{k+1} \neq v_{k+1.}$,
Cas 1.2.1 $\text{longueur}(u) \leq k$ dans ce cas u est préfixe de w et donc u infLex v
Cas 1.2.2 $\text{longueur}(u)>k$, dans ce cas, k est tel que $0 \leq k<\inf(\text{longueur}(u),\text{longueur}(w))$ et tel que pour tout $i \leq k$ $w_i=u_i$ et $u_{k+1} < w_{k+1}$,donc u infLex w.

Cas 2 il existe k, $0 \leq k<\inf(\text{longueur}(u),\text{longueur}(w))$ tel que pour tout $i \leq k$ $u_i=v_i$ et $v_{k+1} \leq v_{k+1}$ et $u_{k+1} \neq v_{k+1.}$,
Cas 2.1 v est prefixe de w, donc $0 \leq k<\inf(\text{longueur}(u),\text{longueur}(v))$ tel que pour tout $i \leq k$ $u_i=w_i$ et $u_{k+1} \leq w_{k+1}$ et $w_{k+1} \neq u_{k+1.}$, donc u infLex w
Cas 2.2 il existe k', $0 \leq k'<\inf(\text{longeur}(v),\text{longueur}(w))$ tel que pour tout $i \leq k'$ $w_i=v_i$ et $v_{k'+1} \leq w_{k'+1}$ et $w_{k'+1} \neq v_{k'+1.}$,
Cas 2.2.1 k'>=k, dans ce cas $0 \leq k<\inf(\text{longueur}(u),\text{longueur}(w))$ tel que pour tout $i \leq k$ $u_i=w_i$ et $u_{k+1} \leq w_{k+1}$ et $w_{k+1} \neq u_{k+1.}$, donc u infLex w

Cas 2.2.2k'<k Dans ce cas $0 \leq k'<\inf(\text{longueur}(u),\text{longueur}(w))$ tel que pour tout $i \leq k'$ $u_i=w_i$ et $u_{k'+1} \leq w_{k'+1}$ et $w_{k'+1} \neq u_{k'+1.}$, donc u infLex w

On vérifie aisément qu'il s'agit d'un ordre total .

12. *Dans (IN, $\leq$) quels sont les minorants et les majorants de E'=$\{$6,8,23$\}$?*

Les minorants sont tous les entiers inférieurs ou égaux à 6. Les majorants sont tous les entiers supérieurs ou égaux à 23.

13. *Dans(P(IN),$\subset$), quels sont les minorants et les majorants de E'=$\{$ $\{$6,8,23,42$\}$, $\{$8,23,37$\}$, $\{$6,8,23$\}$$\}$?*

Les minorants sont $\{$8,23$\}$,$\{$23$\}$,$\{$8$\}$ et l'ensemble vide. En fait tout ensemble inclus dans l'intersection des trois éléments de E' est un minorant.
Les majorants sont tous les sous-ensembles de N qui contiennent $\{$6,8,23,37,42$\}$. En fait tout ensemble contenant l'union des trois éléments de E' est un majorant.

14. *Donnez, si possible, un exemple d'un sous-ensemble E' d'un ensemble ordonné (E,$\leq$) n'ayant aucun majorant*

Il suffit de choisir E=E'=N et la relation d'ordre usuelle.

15. *Donnez, si possible, un exemple d'un sous-ensemble E' d'un ensemble ordonné (E,$\leq$) n'ayant aucun minorant*

Il suffit de prendre E=E'=Z, et la relation d'ordre usuelle

16. *Mêmes questions si la relation d'ordre est un ordre total*

Les ordres donnés en exemple sont des ordres totaux.

17. *Si A= $\{$a,b,c,d$\}$ est un alphabet muni d'un ordre strict a<b<c<d et si (A^+,$\leq$) est l'ensemble des mots sur A muni de l'ordre lexicographique, quels sont les minorants et les majorants de $\{$aab, ab,cd$\}$?*

Les minorants sont le mot vide, a, aa, aab, et tous les mots commençant par aaa.
Les majorants sont tous les mots qui commencent par cd, et tous les mots commençant par d.

18. *Un élément de E' peut-il être un majorant de E'?*

Oui par exemple dans (N, $\leq$), 23 est un minorant de E'=$\{$2,8,23$\}$

19. *E' peut-il avoir plusieurs majorants?*

Oui, voir plus haut

20. *Deux éléments distincts de E' peuvent-il être majorants de E'?*

Non car si x et y sont deux majorants de E' alors x est inférieur ou égal à y et y est inférieur ou égal à x, donc x=y.

21. *Est ce que cela change quelque chose si la relation d'ordre est totale?*

non

22. *ou si l'ensemble E est fini?*

Non

23. *Donnez un exemple d'ensemble ordonné (E,≤) et de sous-ensemble E' admettant minimum, (resp. un maximum)*

On peut choisir (E,≤)= (N,≤) et E' égal à n'importe quel sous-ensemble de N.

24. *Donnez un exemple d'ensemble ordonné (E,≤) et de sous-ensemble E' n'admettant pas de minimum, (resp. de maximum)*

On peut choisir E=(P(N),⊂), et E'={{2,8,23}, {12,8,23}}

25. *Dans (N, ≤) E'={6,8,23} a t-il un minimum, un maximum?*

Oui, le minimum est 6, le maximum est 23.

26. *Dans (R, ≤), E'=[3,7[a-t-il un minimum, un maximum ?*

Le minimum est 3, mais il n'y a pas de maximum

27. *Dans(P(N),⊂){ {6,8,23,42}, {8,23,37}, {6,8,23}} a -t-il un minimum, un maximum ?*

Non

28. *Dans(P(N),⊂), { {6,8,23,42}, {8,23,37}, {6,8,23}} a -t-il un élément maximal, minimal?*

{6,8,23,42} et {8,23,37 sont deux éléments maximaux. , {8,23,37} et {6,8,23} sont deux éléments minimaux.