

42. Analyse descendante : Montrez que  $x$  appartient à  $X$  si et seulement si

- $x$  est dans  $B$
- ou
- il existe  $\omega$  dans  $\Omega$ , et un  $p$ -uplet  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  d'éléments de  $X$  tel que  $x = \omega(x_1, x_2, \dots, x_p)$

Clairement si l'une des deux conditions est vérifiée, alors  $x$  appartient à  $X$ .

Réciproquement, supposons qu'il existe un élément de  $X$  ne vérifiant aucune de ces deux conditions. Soit  $y$  cet élément. Considérons  $Y = X - \{y\}$ .

Puisque  $y$  n'appartient pas à  $B$ , et que  $B$  est inclus dans  $E$ ,  $B$  est aussi inclus dans  $Y$ .

Si l'on applique une règle à des éléments de  $Y$ , on obtient un résultat dans  $X$ , qui ne peut pas être  $y$ , et donc qui est dans  $Y$ .

$Y$  est donc stable pour  $\Omega$ . Ceci contredit la définition de  $X$ , plus petit ensemble contenant  $B$  et stable pour  $\Omega$ .

43. Les schémas donnés plus tôt pour définir les entiers, les entiers pairs, les entiers relatifs sont ils libres ?

Oui pour celui des entiers pairs, en effet 0 qui est dans la base ne peut pas être obtenu par la règle  $n$  donne  $n+2$ . Un élément qui n'est pas dans la base est obtenu par l'unique règle à partir de l'unique entier pair  $k-2$

Non pour les entiers relatifs, 0 est dans la base, peut être obtenu en ajoutant un à moins un ou en retirant un à un.

44. Donner une définition par induction structurelle de l'ensemble  $A^+$  des mots finis non vides.

Base toute lettre un mot

Règle : Si  $m$  est un mot et  $a$  une lettre,  $am$  est un mot.

45. Donner une définition par induction structurelle de l'ensemble  $A^*$  des mots finis

Base le mot vide est un mot

Règle : Si  $m$  est un mot et  $a$  une lettre,  $am$  est un mot.

46. Le premier schéma définissant les mots finis non vides+ est il libre ?

Oui, parce que la règle produit des mots ayant au moins deux lettres, et qu'un mot produit par la règle à un antécédent unique

47. Le second schéma définissant les mots finis non vide est il libre ?

Non, le mot  $aaaa$  peut être produit par la règle à partir de  $(aa,aa)$  ou à partir de  $(a,aaa)$

48. Donner deux exemples de schéma inductif ne comportant qu'une seule règle et cependant non libre?

C'est le cas pour le deuxième schéma définissant les mots.

C'est aussi le cas pour le schéma suivant

Base  $a, b, c$ , et  $d$  sont dans  $E$

Règle si  $x$  et  $y$  sont dans  $E$ ,  $x+y$  est dans  $E$

Ce schéma n'est pas libre car  $a+b+c$  peut être formé à partir de  $a+b$  et de  $c$  ou de  $a$  et de  $b+c$ .

49. Le schéma définissant les mots finis est-il libre ?

Oui, car  $\varepsilon$  ne peut être produit par une règle (tout mot produit contient au moins une lettre), et un mot produit par la règle ne peut avoir qu'un antécédent.

50. Les mots suivants sont-ils dans LP?

- (((()))
- ((((((())))))
- (())()
- ()()
- ()()
- ((()))()

Montrons que tous les mots de la forme  $(^i)^i$  sont dans LP (cette notation représente un mot formé de  $i$  parenthèses ouvrantes suivies de  $i$  parenthèses fermantes).

Par récurrence sur  $i$ .

Si  $i=0$  c'est vrai, car le mot vide est dans LP

On suppose que c'est vrai pour un certain  $i$ . Le mot  $(^{i+1})^{i+1}$  est aussi dans LP car il peut être produit par la règle en prenant  $u=(^i)^i$  et  $v=\varepsilon$ .

Le premier mot n'est pas dans LP, car il ne contient pas autant de ( que de ). On justifiera plus tard cette intuition

Le second est dans LP

Le troisième est dans LP car il peut être produit par la règle en choisissant  $u=v=()$

Le quatrième est dans LP car il peut être produit par la règle en choisissant  $u=\varepsilon$  et  $v=()$

Le cinquième est dans LP car il peut être produit par la règle en choisissant  $u=\varepsilon$  et  $v=()$ , lequel  $v$  est dans LP car il peut être produit par la règle en choisissant  $u'=\varepsilon$  et  $v'=()$ .

Le sixième est dans LP car il peut être produit par la règle en choisissant  $u=())\varepsilon$  et  $v=()$

51. Démontrez la validité de l'induction structurelle

Si ce n'était pas le cas, il existerait une propriété  $P$  et un ensemble  $E$  défini par un schéma inductif, tel que  $P$  soit vrai pour tout élément de la base,  $P$  soit propagée par chacune des règles du schéma et cependant il existe au moins un élément  $e$  de  $E$  pour le quel la propriété est non vraie.

Soit  $F$  le sous ensemble de  $E$  constitué des éléments de  $E$  pour lesquels la propriété  $P$  est vraie.

$B$  est inclus dans  $F$  puisque  $P$  est vraie pour tout élément de la base

$F$  est stable par les règles du schéma définissant  $E$  puisque  $P$  est propagée par chacune des règles du schéma

$F$  est strictement inclus dans  $E$ .

Ce qui contredit le fait que  $E$  est le plus petit ensemble contenant  $B$  et stable par les règles.

52. Montrer que ces définitions sont bien correctes pour  $N^2$

$$(0,0) \in E$$

$$(n,m) \in E \Rightarrow (n,m+1) \in E$$

$$(n,m) \in E \Rightarrow (n+1,m) \in E$$

$$(0,0) \in F$$

$$(n,m) \in F \Rightarrow (n,m+1) \in F$$

$$(n,0) \in F \Rightarrow (n+1,0) \in F$$

En déduire deux schémas de preuve par induction sur  $N^2$

**Premier ensemble**

$E$  est inclus dans  $\mathbb{N}^2$ .

Par induction structurale

Base  $(0,0)$  est dans  $\mathbb{N}^2$

Supposons  $(n,m)$  dans  $\mathbb{N}^2$ , alors  $(n+1,m)$  et  $(n+1,m)$  sont dans  $\mathbb{N}^2$

$\mathbb{N}^2$  est inclus dans  $E$

On va montrer par récurrence sur  $k$  que  $n \leq k, m \leq k$  impliquent que  $(n,m)$  est dans  $E$ .

Pour  $k=0$ , c'est vrai car  $(0,0)$  est dans  $E$

On suppose que pour un certain  $k$ ,  $n \leq k, m \leq k$  impliquent que  $(n,m)$  est dans  $E$ .

Soit  $(n,m)$  tels que  $n \leq k+1$  et  $m \leq k+1$ .

Si  $n \leq k$  et  $m \leq k$ ,  $(n,m)$  est dans  $E$ .

Si  $n \leq k$ , et  $m = k+1$ , alors par hypothèse de récurrence,  $(n,m-1)$  est dans  $E$  et donc  $(n,m)$  est dans  $E$ .

Si  $m \leq k$ , et  $n = k+1$ , alors par hypothèse de récurrence,  $(n-1,m)$  est dans  $E$  et donc  $(n,m)$  est dans  $E$ .

$(k,k)$  étant dans  $E$ ,  $(k+1,k)$  est dans  $E$  et  $(k+1,k+1)$  aussi.

On en déduit qu'une propriété  $P(n,m)$  est vraie pour tout les couples d'entiers  $(n,m)$  si et seulement si  $P(0,0)$  est vraie, et  $P(n,m) \Rightarrow P(n+1,m)$  et  $P(n,m) \Rightarrow P(n+1,m)$

**Second ensemble**

$F$  est inclus dans  $\mathbb{N}^2$ .

Par induction structurale

Base  $(0,0)$  est dans  $\mathbb{N}^2$

Supposons  $(n,m)$  dans  $\mathbb{N}^2$ , alors  $(n+1,m)$  est dans  $\mathbb{N}^2$

Supposons  $(n,0)$  dans  $\mathbb{N}^2$ , alors  $(n+1,0)$  est dans  $\mathbb{N}^2$

$\mathbb{N}^2$  est inclus dans  $F$

On va montrer par récurrence sur  $k$  que  $n+m \leq k$  impliquent que  $(n,m)$  est dans  $F$ .

Pour  $k=0$ , c'est vrai car  $(0,0)$  est dans  $F$

On suppose que pour un certain  $k$ ,  $n+m \leq k$  impliquent que  $(n,m)$  est dans  $F$ .

Soit  $(n,m)$  tels que  $n+m \leq k+1$ .

Si  $m=0$ , alors par hypothèse de récurrence,  $(n-1,0)$  est dans  $F$  et donc  $(n,m)$  est dans  $F$ .

Si  $m$  est non nul,

si  $n$  est nul, alors  $(n,m)$  est dans  $F$ ,

sinon  $(n-1,m)$  est dans  $\mathbb{N}^2$  et donc par hypothèse de récurrence dans  $F$ . Par définition de  $F$ ,  $(n,m)$  est donc dans  $F$ .

On en déduit qu'une propriété  $P(n,m)$  est vraie pour tout les couples d'entiers  $(n,m)$  si et seulement si  $P(0,0)$  est vraie, et  $P(n,m) \Rightarrow P(n+1,m)$  et  $P(n,0) \Rightarrow P(n+1,0)$

53. Soit  $M$  le sous ensemble de  $(0,1)^*$  constitué des mots ayant autant de 0 que de 1. Soit  $E$  l'ensemble défini de manière inductive par

Base  $\varepsilon \in E$

Règles:  $m \in E \Rightarrow 0m1 \in E$

$m \in E \Rightarrow 1m0 \in E$

a) Le schéma définissant  $E$  est-il libre?

b) A-t-on  $M \subset E$ ?

c) A-t-on  $E \subset M$ ?

a) le schéma définissant E est libre, en effet

- aucun mot ne peut être dans la base (donc de longueur de nulle) et produit par une règle (donc de longueur au moins deux)
- un mot se terminant soit par un un soit par un zéro, il ne peut être produit que par l'une des deux règles.
- Un seul antécédent est possible pour une règle donnée, car  $0m1=0m'1$  entraîne  $m=m'$  et de même  $1m0=1m'0$  entraîne  $m=m'$ .

b) Non, par exemple, le mot 0110 appartient à M (il comporte autant de zéro que de un), mais pas à E (il n'est pas dans la base et aucune règle ne peut le produire)

c) Oui. La preuve se fait facilement par induction structurelle

Base : le mot vide contient autant de zéro que de un (zéro de chaque)

Propagation : Supposons que m contienne autant de zéro que de un, alors clairement il en est de même de  $0m1$  et de  $1m0$ .

54. *Donnez et prouvez une définition inductive pour l'ensemble des mots binaires palindromes*

Une définition possible est

Base  $\{\epsilon, 0, 1\}$  est inclus dans E

Règles Si m est dans E, alors  $1m1$  est dans E

Si m est dans E, alors  $0m0$  est dans E

Soit P l'ensemble des palindromes.

Montrons l'égalité des deux ensembles

E est inclus dans P

La preuve se fait très simplement par induction structurelle

Base:  $\epsilon, 0$  et  $1$  sont bien des palindromes

Propagation: Supposons que m est un palindrome, alors il en est de même de  $1m1$  et de  $0m0$ .

P est inclus dans E

- La preuve se fait sur la longueur des mots de P
- Si cette longueur est 0 alors le mot est dans la base de E, donc dans E
- Supposons que tout mot de P de longueur  $<k$  est aussi dans E
  - Soit alors m un mot de P de longueur k.
  - Si sa longueur est un il est dans la base, on peut donc supposer k au moins égal à deux.
  - Si la dernière lettre de m est un 1, alors la première lettre doit aussi être un 1 et ainsi  $m=1m'1$  et  $m'$  est lui aussi un mot de P. Comme la longueur de  $m'$  est  $<k$ ,  $m'$  est dans E (par hypothèse de récurrence) et donc  $m=1m'1$  est aussi dans E (par définition de E).
  - Sinon, la dernière lettre de m est un 0, mais alors sa première lettre est aussi un 0 et on a  $m=0m'0$ , et  $m'$  est lui aussi un mot de P. Comme la longueur de  $m'$  est  $<k$ ,  $m'$  est dans E (par hypothèse de récurrence) et donc  $m=0m'0$  est aussi dans E (par définition de E).

Le schéma est libre, en effet :

- aucun mot ne peut être dans la base (donc de longueur de un) et produit par une règle (donc de longueur au moins deux)
- un mot se terminant (et commençant) soit par un un soit par un zéro, il ne peut être produit que par l'une des deux règles.
- Un seul antécédent est possible pour une règle donnée, car  $1m1=1m'1$  entraîne  $m=m'$  et de même  $0m0=0m'0$  entraîne  $m=m'$ .