55. Donnez et prouvez une définition inductive pour l'ensemble des mots binaires représentant des entiers pairs sans zéro inutile en tête.

Soit E l'ensemble défini de manière inductive par
Base : 0 est dans E
Règles Si m est dans E alors 1m est dans E
Si m≠0 et m ' sont dans E, mm' est dans E

Soit MBP l'ensemble des mots binaires représentant les entiers pairs sans zéro inutile en tête.

Montrons par induction structurelle que E⊂MBP
Base
0 représente bien un mot binaire pair sans 0 inutile en tête
Propagation
Supposons que m soit dans MB, alors 1m est aussi dans MB puis qu'il se termine par 0 et commence par un un.
Supposons que m et m' sont dans MB, et que m soit différent de 0, alors mm' commence par un un et termine par un zéro, et donc mm' est bien dans MBP

Montrons par récurrence sur k que tout mot de MBP de longueur au plus k est dans E.
Base k=1, le seul mot concerné est le mot 0 qui est dans E
Hypothèse de récurrence : pour un certain entier k>0, tout mot de MBP de longueur au plus k est dans E.
Soit m un mot de MBP de longueur k+1. m est de longueur au moins deux, donc m commence par un 1 et termine par un 0
Si m est de longueur deux, m=10 et donc m appartient à MBP

Sinon, m=1m'0. Si m' termine par un 0, m=1n00, le mot 1n0 est dans MBP, il est de longueur k et donc il appartient à E et m aussi est dans E.
Sinon si m' ne comporte que des un, m=11n0, le mot 1n0 est dans MBP, il est de longueur k et donc il appartient à E et m aussi est dans E.
Sinon le mot m' comporte des 0 et des 1, de plus m' termine par un 1, m' est donc de la forme $m'=n01^i$, donc $m=1n01^i0$. Or 1n0 et 1^i0 sont deux mots de MBP de longueur inférieure à k, donc des mots de E, donc m est dans E.

56. Donnez et prouvez une définition inductive pour l'ensemble des mots binaires représentant des entiers pairs sans zéro inutile en tête.

Soit E l'ensemble défini de manière inductive par
Base : 0 est dans E
Règles Si m est dans E alors 1m est dans E
Si m≠0 et m ' sont dans E, mm' est dans E

Soit MBP l'ensemble des mots binaires représentant les entiers pairs sans zéro inutile en tête.

Montrons par induction structurelle que E⊂MBP

Base
0 représente bien un mot binaire pair sans 0 inutile en tête
Propagation
Supposons que m soit dans MB, alors 1m est aussi dans MB puis qu'il se termine par 0 et commence par un un.
Supposons que m et m' sont dans MB, et que m soit différent de 0, alors mm' commence par un un et termine par un zéro, et donc mm' est bien dans MBP

Montrons par récurrence sur k que tout mot de MBP de longueur au plus k est dans E.
Base k=1, le seul mot concerné est le mot 0 qui est dans E
Hypothèse de récurrence : pour un certain entier k>0, tout mot de MBP de longueur au plus k est dans E.
Soit m un mot de MBP de longueur k+1. m est de longueur au moins deux, donc m commence par un 1 et termine par un 0
Si m est de longueur deux, m=10 et donc m appartient à MBP

Sinon, m=1m'0. Si m' termine par un 0, m=1n00, le mot 1n0 est dans MBP, il est de longueur k et donc il appartient à E et m aussi est dans E.
Sinon si m' ne comporte que des un, m=11n0, le mot 1n0 est dans MBP, il est de longueur k et donc il appartient à E et m aussi est dans E.
Sinon le mot m' comporte des 0 et des 1, de plus m' termine par un 1, m' est donc de la forme $m'=n01^i$, donc $m=1n01^i0$. Or 1n0 et 1^i0 sont deux mots de MBP de longueur inférieure à k, donc des mots de E, donc m est dans E.

57. Donner une définition inductive de l'ordre prefixe et de l'ordre lexicographique

Pour l'ordre prefixe

Base $(\varepsilon, \varepsilon) \in E$
Règles : Si a est dans A et $(m,m') \in E$ alors $(m,m'a) \in E$
Si a est dans A et (m,m') est dans E, alors (am,am') est dans E

Montrons que tous les couples (m,n) de E sont tels que m est prefixe de E
C'est vrai pour le couple de la base
Supposons que m soit prefixe de m' alors m est bien prefixe de m' et am est bien prefixe de am'. Le résultat est donc vrai par induction structurelle

Montrons que tout couple (m,n) où m est prefixe de n est bien dans E.
On va en fait montrer par récurrence sur k , que c'est vrai si la longueur de m est borné par k.
Base k=0 , alors $m= \varepsilon$

Montrons que tous les couples (ε,m') sont dans E , par récurrence sur k', la longueur de m'
Si k'=0, c'est vrai, puisque $(\varepsilon, \varepsilon)$ est dans la base
Supposons le résultat vrai si m' est de longueur k.
Soit n un mot de longueur k+1. n=n'a. n' est un mot de longueur k, donc (ε, n') est dans E, donc (ε, n) est aussi dans E

Supposons le résultat vrai si m est de longueur inférieure ou égale à k

Soit m un mot de longueur k+1.
Soit n tel que m soit prefixe de m.
Alors m et n commencent par la même lettre : a.
Soient m' et n' tels que m=am' et n = an'. Le couple (m',n') est dans E par hypothèse de récurrence, donc le couple (m,n) est dans E, par définition de E

Pour l'ordre lexicographique
Base $(\varepsilon ,\varepsilon) \in E$
Règles : Si a est dans A et $(m,m') \in E$ alors $(m,m'a) \in E$
Si a et b est dans A avec $a \leq b$, et (m,m') est dans E, et n est un mot quelconque , alors (amn, bm') est dans E.
Clairement les couples de mots de E sont tels que le premier mot est avant l'autre par ordre lexicographique

Montrons que si m est avant n par ordre lexicographique, alors le couple (m,n) est dans E, par récurrence sur k la longueur de m
Si k=0, alors $m=\varepsilon$ et la preuve est identique à celle faite pour l'ordre préfixe
Supposons le résultat vrai si m est de longueur k
Soit m de longueur k+1
Supposons que m soit avant n par ordre lexicographique.
Soit x la première lettre de m et y la première lettre de n, on a $m \leq n$, et m=xm' et n=yn'
Si x=y, alors m' est avant n' par ordre lexicographique et par hypothèse de récurrence on a (m',n') dans E donc (m,n) dans E
Sinon $x<y$ Si m' est avant n' par ordre lexicographique, par hypothèse de récurrence, on a (m',n') dans E donc (m,n) dans E
Sinon $x<y$ et n' est avant m' par ordre lexicographique.
Mais ε est avant n' par ordre lexicographique et en appliquant la regle 2 à (ε,n') avec n=m', on obtient que (xm',yn')=(m,n) est dans E.