EJC Marne-la-vallée 2 Avril 2003

Filtrage local par décomposition

Application aux systèmes d'équations de distance

Heikel Batnini
INRIA Sophia-Antipolis
Projet COPRIN

Plan

- Programmation par contraintes
  - Notion de $\mathcal{CSP}$
  - Consistances locales
- Problèmatique
- Filtrage local par décomposition
  - Décomposition sémantique des domaines
  - Algorithme de propagation de type point fixe
  - Micro-structure associée à cette décomposition
- Le problème classique du pentagone

Constraint Satisfaction Problems($\mathcal{CSP}$)

- Un $\mathcal{CSP}$ est défini par :
  - Un ensemble de variables $\mathcal{X}$
  - Un ensemble de domaines $\mathcal{D}$ pour ces variables
  - Un ensemble de contraintes $\mathcal{C}$ sur ces variables
- Solution d'un $\mathcal{CSP}$:
  - Une valuation des variables dans leurs domaines qui satisfait toutes les contraintes de $\mathcal{C}$
- Exemple :
  - $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$
  - $\mathcal{D} = \{D_x, D_y, D_z\}$ avec $D_x = D_y = D_z = \{1, 2, 3\}$
  - $\mathcal{C} = \{x = y + z\}$
  - Solutions : $(2, 1, 1)$, $(3, 2, 1)$ et $(3, 1, 2)$

Outils $\mathcal{CSP}$ continus

- Méthodes de filtrage local
  - Arithmétique des intervalles
  - Relaxation des consistances locales des $\mathcal{CSP}$ finis.
  - Les plus utilisées :
    * 2B-consistance et Box-consistance
    * 3B-consistance et Bound-consistance
    * kB-consistance
- Méthodes numériques
  - Programmation linéaire(Simplexe)
  - Méthode de Newton multi-variable
  - Bissection

Arithmétique des intervalles

- Opérateurs standards :
  - $[a,b] + [c,d] = [a+c,\ b+d]$
  - $[a,b] - [c,d] = [a-d,\ b-c]$
  - $[a,b] \times [c,d] = [\min(ac,ad,bc,bd),\ \max(ac,ad,bc,bd)]$
  - $[a,b]\ /\ [c,d] = [\min(\frac{a}{c},\frac{a}{d},\frac{b}{c},\frac{b}{d}),\ \max(\frac{a}{c},\frac{a}{d},\frac{b}{c},\frac{b}{d})]$
- Commutativié, associativité mais pas distributivité
- Si $x \in [a,b]$ alors $f(x) \in F([a,b]$, avec F extension de f aux intervalles.
- Fonctions de projection :
  - Pour une contrainte $c(x, x_1, \ldots, x_k)$, on exprime x sous la forme $x = F_c^x(x_1, \ldots, x_k)$
  - $D_x = D_x \cap F_c^x(D_{x_1}, \ldots, D_{x_k})$

2B-consistance d'un $\mathcal{CSP}$ numérique

- 2B-consistance d'un $\mathcal{CSP}$
  - Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C})$ un $\mathcal{CSP}$ et $c \in C$ une contrainte k-aire sur les variables $(x_1, \ldots, x_k)$.
  - On dit que la contrainte c est 2B-consistante ssi :
    $\forall i, D_{x_i} = \Box\{x_i \in D_{x_i} | \exists v_1 \in D_{x_1} \ldots \exists v_k \in D_{x_k}$ et $c(v_1, \ldots, v_{i-1}, x_i, v_{i+1}, \ldots, v_k)$ est vérifiée $\}$.
  - Un $\mathcal{CSP}$ est 2B-consistant ssi toutes ses contraintes sont 2B-consistantes.
- Algorithme de point fixe $\mathcal{O}(Amn)$.
  - Réduction du domaine d'une variable x par projection sur une contrainte
  - Propagation de cette réduction sur les autres variables liées à x par une autre contrainte

Motivations

- Résolution de CSP numériques non-linéaires.
- kB-consistance ou Box-consistance :
  - Approximation externe de l'espace solution.
  - Conservation de valeurs incohérentes lorsque l'espace solution est divisé en sous-espaces disjoints.
- kB + splitting
  - Isolation des solutions ponctuelles.
  - Inadapté en présence de continuums de solutions.
- Équations de distance
  - Nombreuses applications(robotique, biochimie, ...)
  - Solutions ponctuelles + continuums

Principes de LDF
(Local Decomposition Filtering)

- *Décomposition multi-variables* :
  - Découpage simultané des domaines de plusieurs variables, en utilisant la sémantique des contraintes.
- *Un algorithme de propagation* :
  - Algorithme de point fixe de type kB-consistance avec une fonction de projection spécifique.
- *Une micro-structure* :
  - Graphe multi-parti, reliant les sous-domaines de 2 groupements de variables, satisfaisant l'ensemble des contraintes les mettant en jeu.

Principes de CODD
(Constraint Oriented Domain Decomposition)

- Regrouper des variables qui apparaissent ensemble dans les contraintes.
  - Coordonnées d'un même point dans le cas des équations de distance.
- Utiliser la sémantique d'une contrainte C :
  - Décomposer le domaine d'un regroupement de variables sur les parties convexes, monotones, etc...
- Produire une union de sous-domaines d'un regroupement tel que la contrainte C soit 2B-consistante.

CODD en dimension 2

Soient deux points de $\mathbb{R}^2$, $P_i(x_i, y_i)$ et $P_j(x_j, y_j)$ dont les domaines sont $D_{P_i} = D_{x_i} \times D_{y_i}$ et $D_{P_j} = D_{x_j} \times D_{y_j}$.
En utilisant la contrainte $C_{ij} : (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 = d_{ij}^2$, on réalise une CODD sur D_{P_i} de la manière suivante :

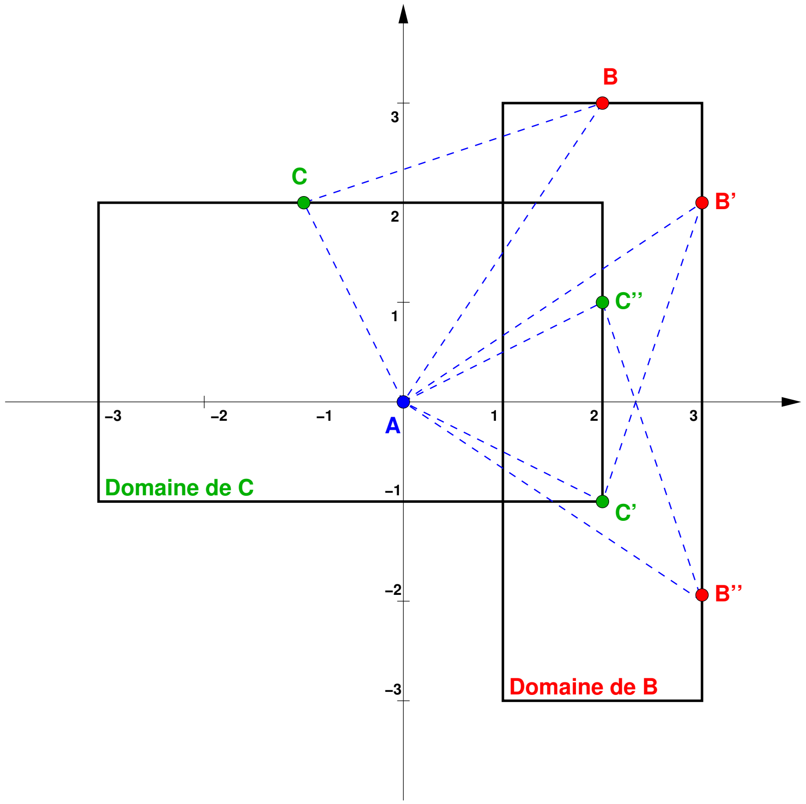
- *Changement de variables* : On pose $X = x_i - x_j$ et $Y = y_i - y_j$ et on calcule les domaines D_X et D_Y.
- *Décomposition* : On décompose $D_X \times D_Y$ par projection sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$, $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-$.
- *Filtrage* : Filtrage par projection 2B de chacun de ces domaines répercuté sur le domaine de D_{P_i}, par changement de repère($x_i = X + x_j$ et $y_i = Y + y_j$).

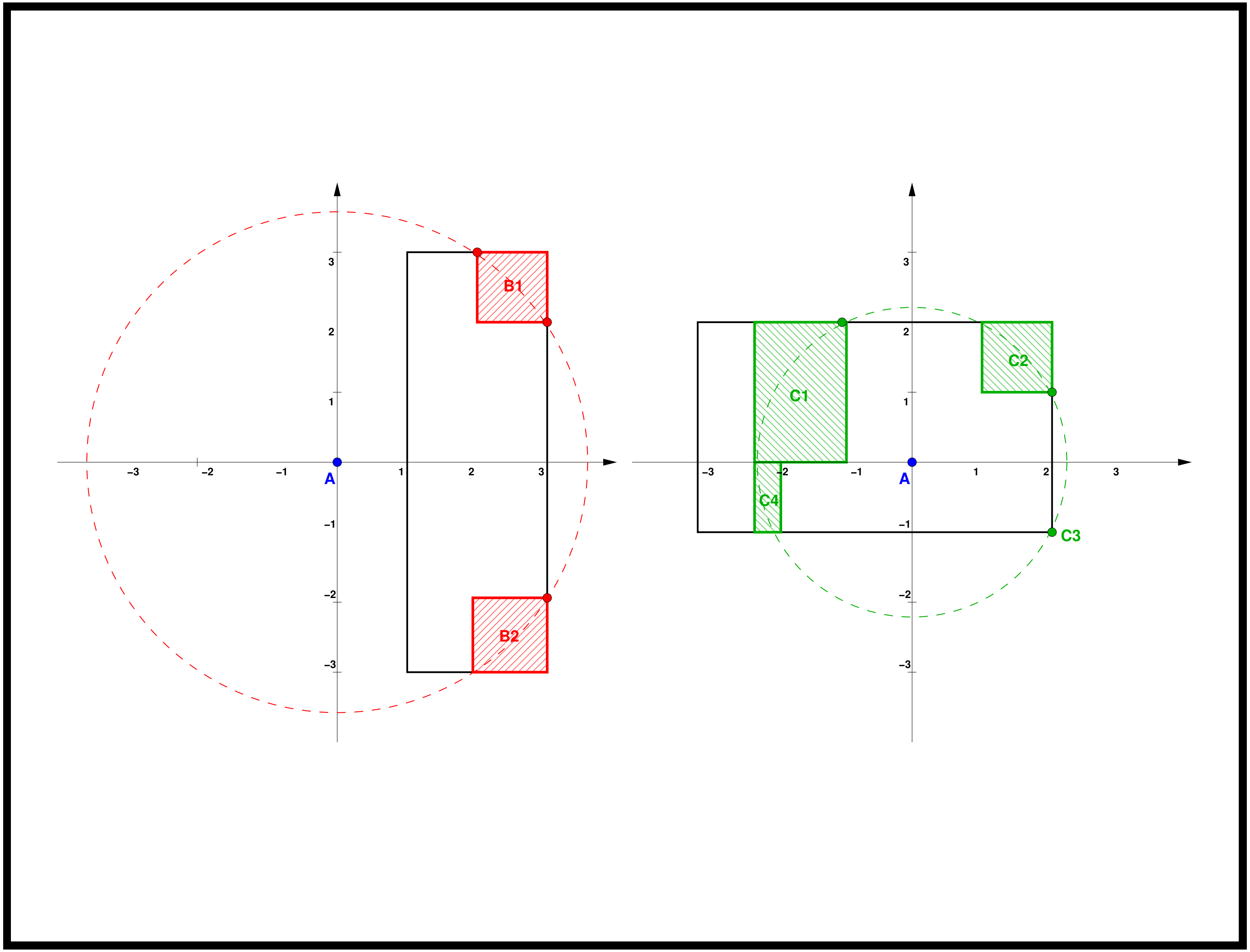
Algorithme LDF(ω)

- Basé sur un algorithme de point fixe de type kB.
- Fonction de projection spécifique utilisant CODD et qui assure la gestion des disjonctions de domaines.
- Produit la micro-structure $\mathcal{M}$ associée à cette décomposition

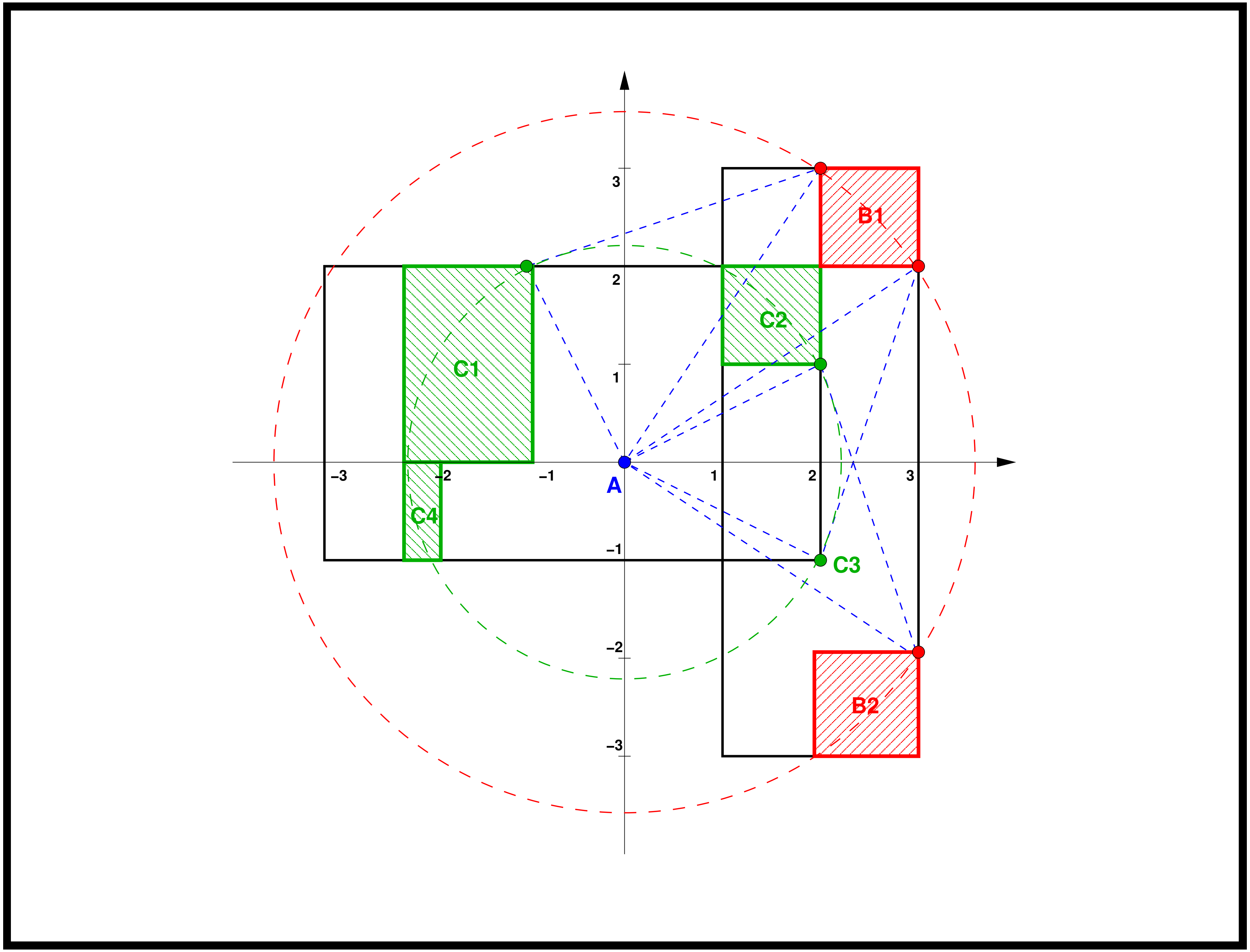
LDF(**in**: ω, **in**: $\mathcal{P} = (\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C})$, **out**: $\mathcal{M}$)
  $Q \leftarrow \{< D_i, D_j, C_{ij} > | C_{ij} \in \mathcal{C}\}$
  $\mathcal{M} \leftarrow \{$ L'ensemble des listes d'adjacence $L_{ij} | C_{ij} \in \mathcal{C}\}$
  Tant que $Q \neq \emptyset$ **faire**
    extraire $< D_i, D_j, C_{ij} >$ de Q
    $D'_i \leftarrow$ **PROJECTION**(D_i, D_j, C_{ij}, L_{ij})
    Si il existe un sous-domaine de D_i réduit de plus de ω **alors**
      $D_i \leftarrow D'_i$
      $Q \leftarrow Q \cup \{< D_j, D_i, C_{ij} > | C_{ij} \in \mathcal{C}\}$
  retourner $\mathcal{M}$

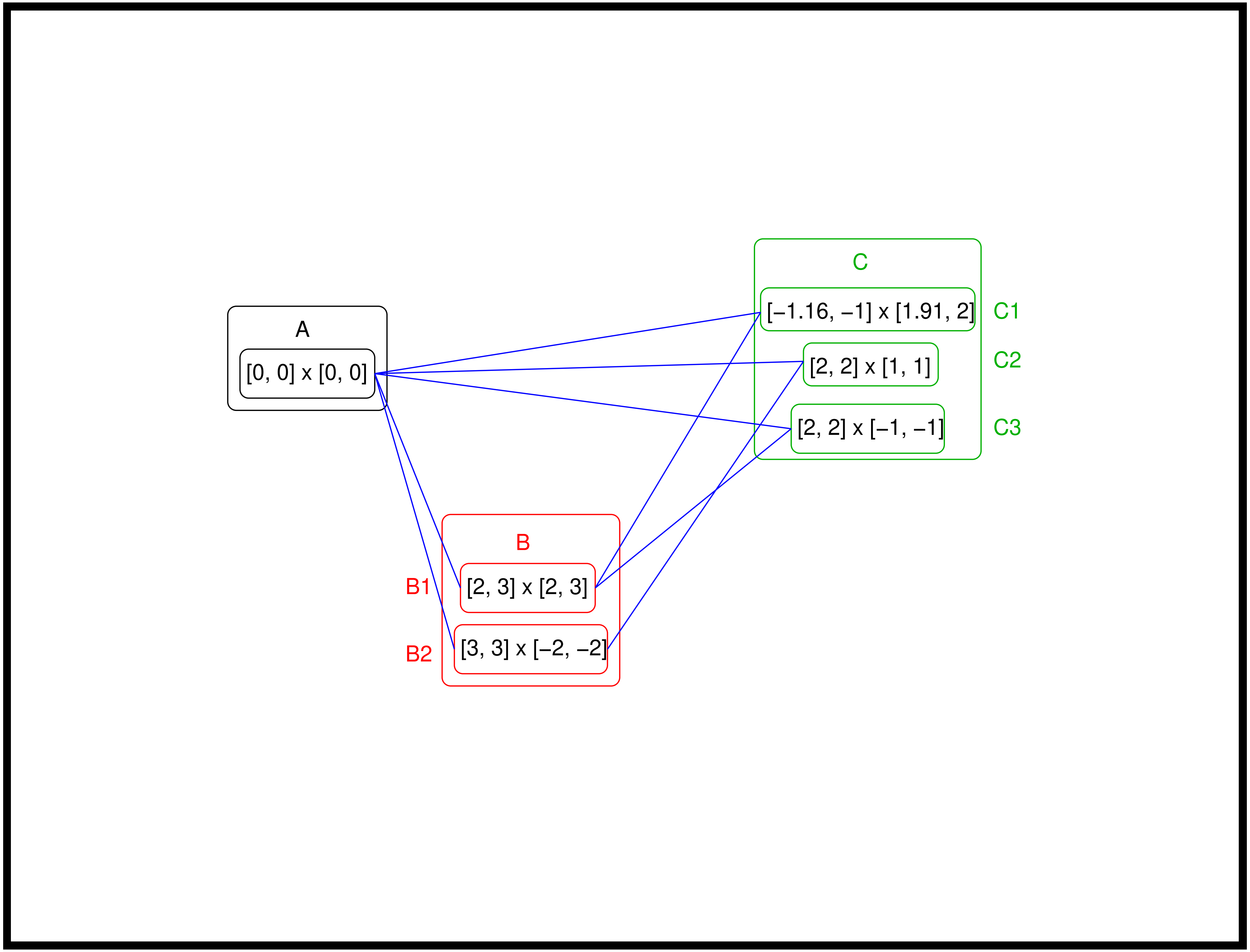
$$\mathcal{X} = \{x_B, y_B, x_C, y_C\}.$$
$$\mathcal{D} = \{[1,3], [-3,3], [-3,2], [-1,2]\}.$$
$$\mathcal{C} = \begin{cases} C_{AB} : & x_B^2 + y_B^2 = 13 \\ C_{AC} : & x_C^2 + y_C^2 = 5 \\ C_{BC} : & (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 = 10 \end{cases}$$





B1
B2
A
C1
C2
C3
C4
A


B1
C1
C2
A
C3
C4
B2
3
2
1
−1
−2
−3
−3
−2
−1
1
2
3



A
[0, 0] x [0, 0]
B
B1
[2, 3] x [2, 3]
B2
[3, 3] x [−2, −2]
C
[−1.16, −1] x [1.91, 2]
C1
[2, 2] x [1, 1]
C2
[2, 2] x [−1, −1]
C3

Propriétés de la micro-structure

- Tout sous-domaine D_i^k de P_i est lié par une arête à un des sous-domaines de P_j.
- D_i^k est la plus petite boîte contenant l'ensemble des projections des sous-domaines de P_j liés à D_i^k par la contrainte C_{ij}.
- Tout sous-domaine de P_i contient une boîte d_i, telle qu'il existe une boîte d_j dans un des sous-domaines de P_j, avec C_{ij} 2B-consistante sur les domaines $d_i \times d_j$.
- Si l'arête $(D_i^k, D_j^{k'})$ est l'unique arête issue de D_i^k et l'unique arête issue de $D_j^{k'}$, alors C_{ij} est 2B-consistante sur les domaines $D_i^k \times D_j^{k'}$.

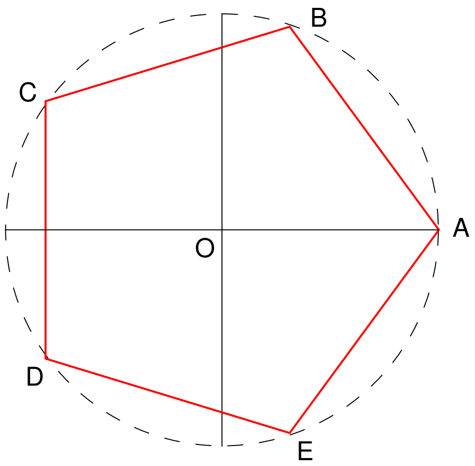
La contrainte C_{ij} est 2B-consistante sur les domaines $\square\{D_i\}$ et $\square\{D_j\}$.

Résolution par LDF

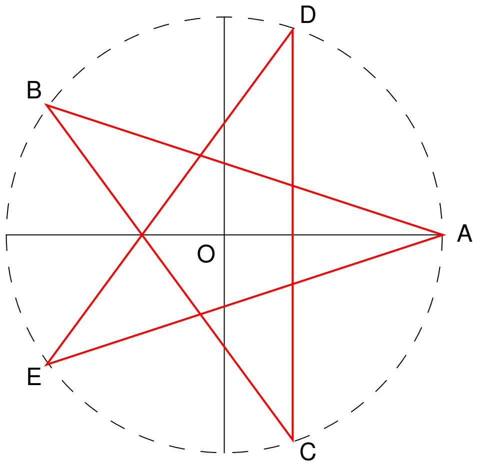
- Micro-structure comparable à un $\mathcal{CSP}$ fini.
- Recherche de sous-$\mathcal{CSP}$ comparable à la recherche de solution en domaines finis.
- Un sous-$\mathcal{CSP}$ contient potentiellement une solution si tous ses domaines sont inter-connectés dans la micro-structure.
- Stratégies de résolution :
  - 2B sur chacun des sous-$\mathcal{CSP}$.
  - 2B+Bissection sur chacun des sous-$\mathcal{CSP}$.
  - ou autres...

Application : Le problème du pentagone

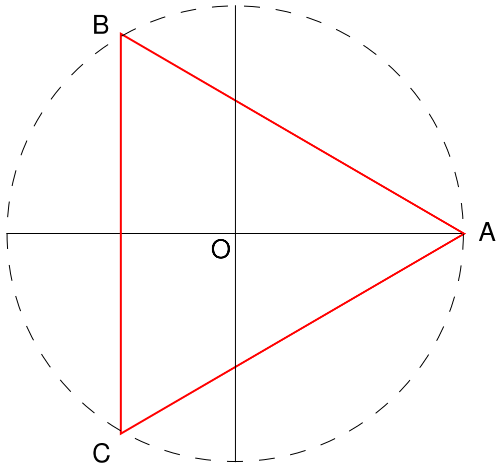
- *Pentagone* : Si $d = 2\sin(\frac{\pi}{5})$ il y a 2 solutions pour la combinaison $P_1P_2P_3P_4P_5$.
- *Pentacle* : Si $d = 2\sin(\frac{2\pi}{5})$ il y a 2 solutions.
- *Triangle* : Si $d = 2\sin(\frac{2\pi}{3})$ il y a 10 solutions.



Pentagone

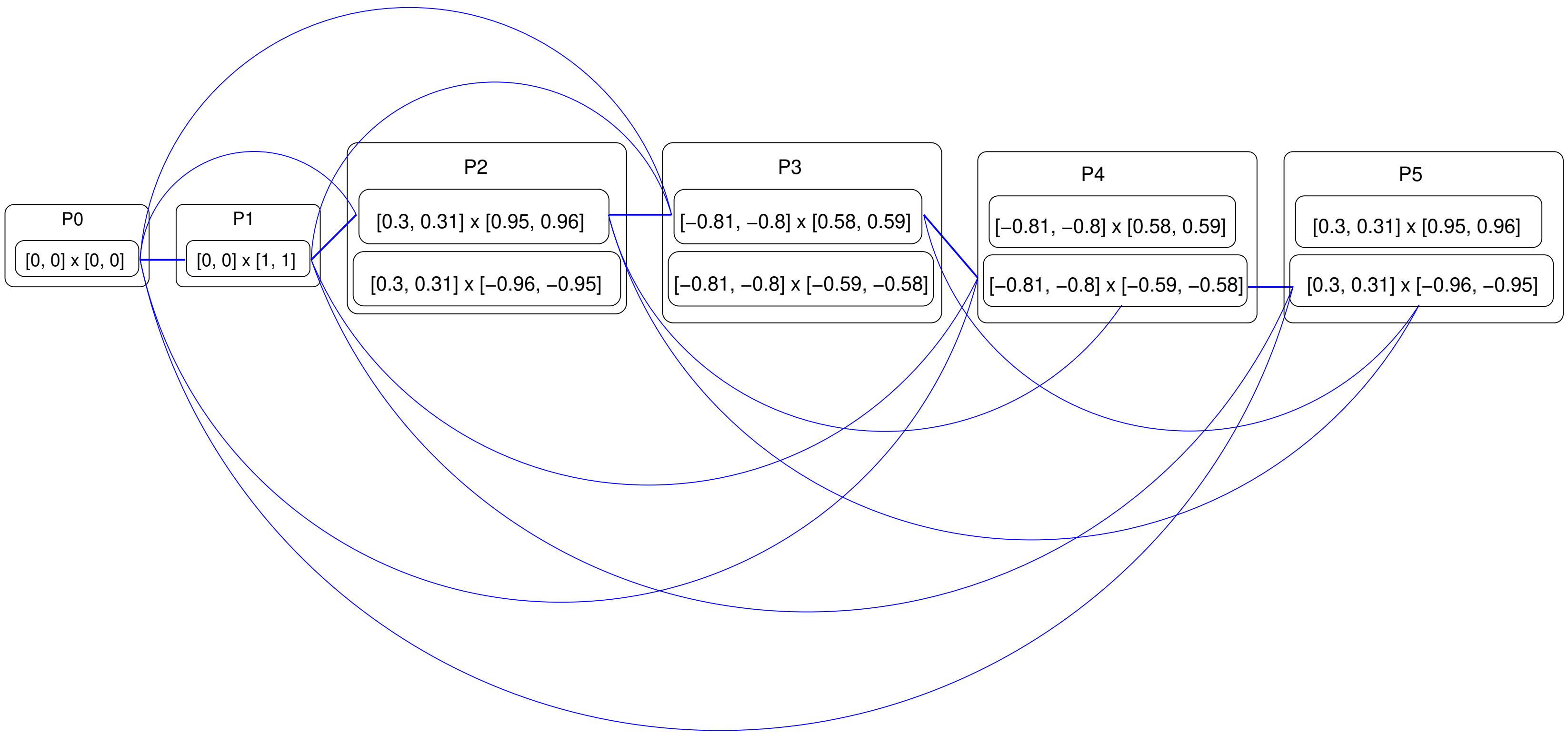


Pentacle

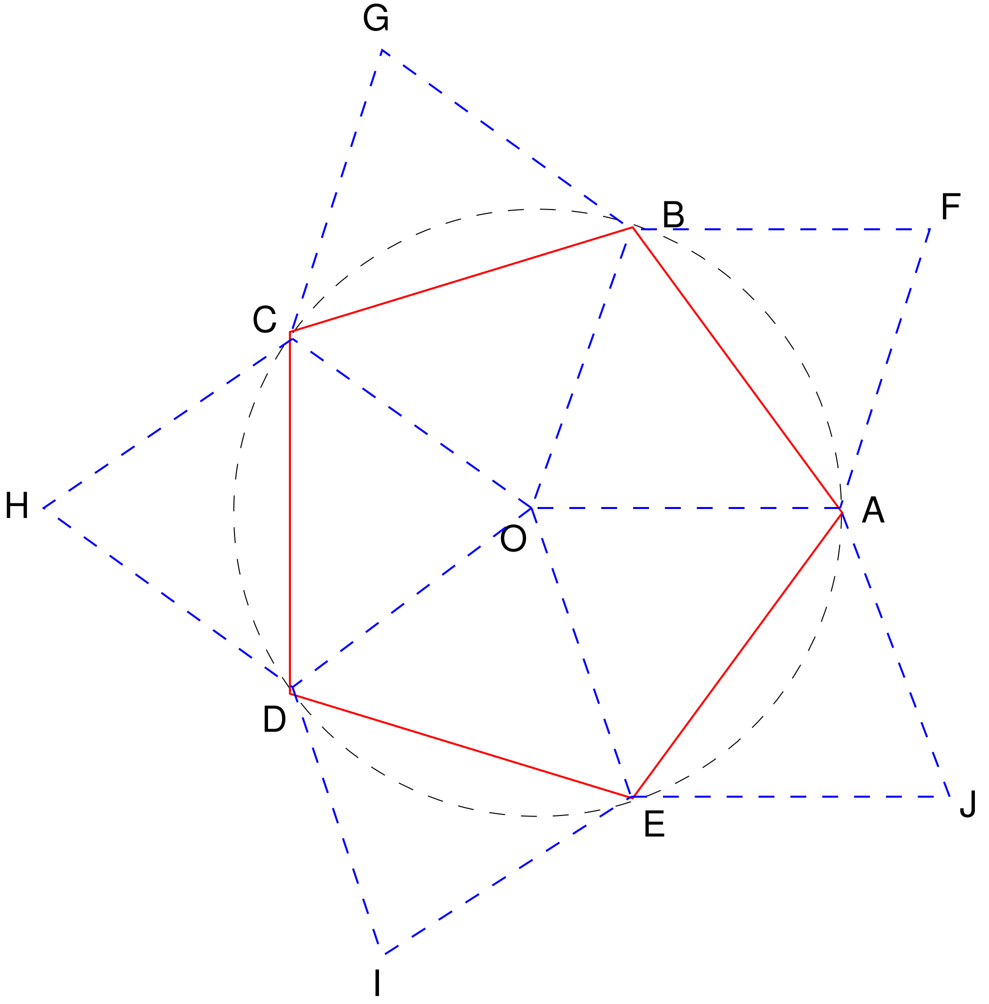


Triangle

Micro-structure générée par LDF pour l'instance "pentagone"



Extension du problème



Résultats expérimentaux

Csp	LDF(10^{-9})	Résolution	2B(10^{-9})+bissection
Pentagone	1.40s	2.14s	2.04s
Pentacle	1.53s	2.27s	162.85s
Triangle	0.7s	6.44s	12.69s

Perspectives

- Amélioration de l'algorithme de recherche de sous-$\mathcal{CSP}$
- Problèmes issus de la robotique et de la théorie des mécanismes
- Généralisation de CODD à d'autres types de contraintes non-linéaires